OSCILAȚII ȘI UNDE

Culegere de probleme pentru clasa a XI-a

Volumul II

OSCILAȚII ELECTROMAGNETICE

135824
B.C.U. - IASI

Editura Universității București
- 1994 -

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Toate drepturile sunt rezervate Editurii Universității București. Orice reproducere sau traducere, fie și parțială, precum și contrafacerile de orice tip, intră sub incidența Codului Penal.

ISBN - 973 - 9160 - 92 - 4

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Autorii selecției și rezolvării problemelor:

profesor **Popa Sever**
Liceul Mihai Viteazu

profesor **Ionescu Rodica**
Liceul Matei Basarab

profesor **Popa Daniela**
Liceul Matei Basarab

Cuvînt înainte

Lucrarea de față se adresează elevilor și cadrelor didactice care doresc să aprofundeze studiul fenomenelor ondulatorii din cadrul programei școlare actuale de fizică pentru clasa a XI-a.

Totodată, prin complexitatea unora din problemele prezentate, și a aparatului matematic folosit, ea este destinată celor ce se pregătesc pentru concursurile de admitere în învățămîntul superior universitar și medical, și, în mod deosebit elevilor capabili de performanță în domeniul fizicii, ca și studenților de la facultățile de fizică.

Unele probleme cuprinse în acest volum au fost alese dintre subiectele propuse la diferite etape ale olimpiadelor de fizică (județeană, națională, internațională), propuse în taberele naționale de fizică, din colecția Revistei de Fizică și Chimie sau din alte publicații.

Toți cei care se consideră autori ai unora dintre acestea și nu sînt menționați sînt rugați să ni se adreseze pentru eventualele drepturi de autor.

Multe dintre probleme sînt însă originale, încercînd să stimuleze gîndirea fenomenologică și intuiția rezolvitorilor și să-i antreneze în găsirea unor soluții mai adecvate și mai interesante.

Am căutat ca din fiecare problemă propusă elevul să fi cîștigat nu numai îndemînarea de a rezolva probleme, dar și informații în domeniul propus, care să-l facă apt de a-și forma o cultură științifică în specialitate.

Autorii.

BCU CLUJ / BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY LIBRARY

CUPRINS

1. Tratarea prin analogie a oscilațiilor mecanice și a circuitelor oscilante electromagnetice ..... pag. 5
2. Oscilații electromagnetice ..... pag. 15
3. Fenomene tranzitorii ..... pag. 79
(problema 46 → problema 54)
4. Oscilații libere ale sistemelor cu mai multe grade de libertate ..... pag. 91
5. ANEXA: Reprezentarea în complex a mărimilor electrice sinusoidale ..... pag. 121

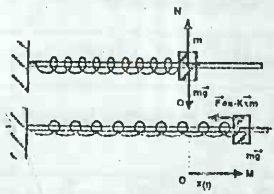
BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tratarea prin analogie a oscilaţiilor mecanice şi a circuitelor oscilante electromagnetice

1) oscilaţii libere neamortizate

a) Pendulul elastic

Sistemul oscilant: corp de masă m ataşat de resortul de masă neglijabilă şi de constantă elastică K. Corpul se deplasează fără frecare în lungul tijei sub acţiunea forţei elastice



→în poziţia de echilibru

→în mişcare oscilatorie la momentul (t)

Legea de mişcare (principiul II al dinamicii) $ma = -Kx$ sau $\ddot{x} = -(K/m)\,x$ (1)

Se notează cu $\omega = \sqrt{K/m}$, pulsaţia mişcării liniare oscilatorii armonice

Perioada ei:

$$T = 2\pi\sqrt{m/K} \qquad (2)$$

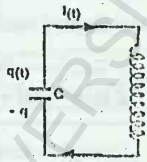
Soluţia ecuaţiei $\ddot{x} = -(K/m)\,x$ este:

$$x_{(t)} = A\sin(\omega t+\varphi) \qquad (3)$$

unde amplitudinea A şi faza φ se determină din condiţiile iniţiale (la $t_0=0$, $x_{(0)} = x_0$ şi $v_{(0)} = v_0$)

b) Circuitul L.C.

Sistemul oscilant: condensator de capacitate C descărcîndu-se (sau încărcîndu-se) printr-o bobină ideală de inductanţă L



Ecuaţia ce descrie descărcarea (încărcarea) oscilatorie a condensatorului prin bobină este dată de aplicarea legii lui Kirchhoff la momentul t:

$$-L\,(di/dt) = q/c \text{ adică } e_n = n_c \qquad (1)$$

sau ţinînd cont că $i = dq/dt$ (d^2q/dt^2) =

$$= -(1/LC)q \qquad (1')$$

De aici pulsaţia $\omega = 1/\sqrt{LC}$ şi perioada

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (2)$$

Soluţia ecuaţiei (1'):

$$q_{(t)} = Q_m \sin(\omega t+\varphi) \qquad (3)$$

unde Q_m şi φ se determină din condiţiile iniţiale ($t_0=0$, $q_{(0)}=q_0$, $i_{(0)} = i_0$)

Mărimi analoge

elongaţia	$x_{(t)}$ ⟷ $q_{(t)}$	sarcina pe condensator
viteza de oscilaţie	$v_{(t)}$ ⟷ $i_{(t)}$	intensitatea curentului prin bobină

BCU IAŞI CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY

Mărimi analoge

$v = dx/dt = \dot{x}$		$i = dq/dt = \dot{q}$
accelerația	$a_{(t)} \longleftrightarrow di/dt$	derivata intensității în raport cu timpul
$a = dv/dt = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$		$di/dt = d^2q/dt^2 = q$
masa oscilatorului	$m \longleftrightarrow L$	inductanța bobinei
constanta elastică	$k \quad 1/C$	inversul capacității condensatorului
energia potențială a sistemului oscilant		energia de tip electric acumulată între plăcile condensatorului

$$E_p = kx^2/2 = (kA^2/2)\sin^2(\omega t+\varphi) \leftrightarrow W_{el} = q^2/2C = (Qm^2/2C)\sin^2(\omega t+\varphi)$$

energia cinetică: energia de tip magnetic acumulată în bobină

$$E_c = (kA^2/2)\cos^2(\omega t+\varphi) \longleftrightarrow W_{mg} = Li^2/2 = (LIm^2/2)\cos^2(\omega t+\varphi)$$
$$= (Qm^2/2C)\cos^2(\omega t+\varphi)$$

Bilanțul energetic al oscilațiilor libere

Pornind de la ecuația de mișcare și amplificînd cu vdt:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \,/\, vdt$$

$$m(dv/dt)\,vdt + kx(dx/dt)dt = 0$$
$$mvdv + kxdx = 0$$
$$d(mv^2/2 + kx^2/2) = 0$$
$$d(Ec + Ep) = 0$$
$$E_c + E_p = E_m = ct.$$

Obținem conservarea energiei mecanice totale a oscilatorului elastic liber fără frecare.

Pornind de la legea lui Ohm și amplificînd cu idt:

$$Ldi/dt + q/c = 0 \,/\, idt$$

$$Lidi + (q/C)(dq/dt)dt = 0$$
$$Lidi + (1/C)\,qdq = 0$$
$$d(Li^2/2 + q^2/2C) = 0$$
$$d(W_{el} + W_{mg}) = 0$$
$$W_{elmg} = W_{el} + W_{mg} = ct$$

Conservarea energiei electromagnetice totale a circuitului oscilant.

BCU / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2) oscilaţii libere amortizate

a) Pendul elastic cu frecare fluidă

Sistemul oscilant: oscilator elastic asupra căruia acţionează o forţă de frecare (fluidă cu aerul) proporţională cu viteza şi de sens contrar ei ($F_f = -r\vec{v}$)

Ecuaţia de mişcare:

$$m\vec{a} = -r\vec{v} - k\vec{x} \quad \text{adică}$$

$$\ddot{x} + r\dot{x}/m + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

unde $\omega_0^2 = k/m$ pătratul pulsaţiei în absenţa frecărilor

Notaţie $b = r/2m$ coef. de amortizare

Discuţie:

a) dacă $\omega_0^2 > b^2$ oscilaţii amortizate pseudoperiodice

Soluţia ecuaţiei (1) de forma:

$$x_{(t)} = A_0 e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi) \qquad (2)$$

unde $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ pseudopulsaţia şi corespunzător

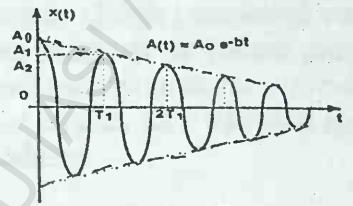
$$T_1 = 2\pi/\omega_0\sqrt{1-(b/\omega_0)^2} > 2\pi/\omega_0 = T_0 \quad (3)$$

pseudopulsaţia mai mare decît perioada oscilatorului fără frecare

Decrementul logaritmic:

$$\delta = \ln A_{(t)}/A_{(t+T1)} = bT_1 =$$

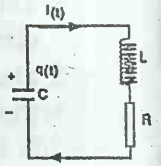
$$= 2\pi b/\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$



b) dacă $\omega_0 = b$ amortizarea este aperiodică critică. Soluţia ecuaţiei (1)

b) Circuit RLC

Sistemul oscilant: condensator de capacitate C descărcîndu-se (sau încărcîndu-se) printr-o bobină de inductanţă L şi rezistenţă R



Legea lui Kirchhoff

$-Ldi/dt = q/C + Ri$ sau

$$d^2q/dt^2 + R/L\,(dq/dt) + \omega_0^2 q = 0 \qquad (1)$$

unde $\omega_0^2 = 1/LC$

pulsaţia în absenţa rezistenţei

Notaţie $\alpha = R/2L$

Discuţie:

a) dacă $\omega_0 > \alpha$, adică $R < 2\sqrt{L/C}$

(rezistenţă mică) se obţin oscilaţii amortizate pseudoperiodice:

$$q_{(t)} = Q_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi) \qquad (2)$$

unde $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ este pseudopulsaţia. Corespunzător pseudoperioada:

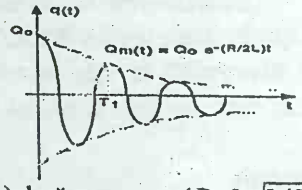
$$T_1 = 2\pi/\omega_1 = 2\pi/\omega_0\sqrt{1-(\alpha/\omega_0)^2} =$$

$$= T_0/\sqrt{1-(\alpha/\omega_0)^2} > T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \quad (3)$$

superioară perioadei în absenţa rezistenţei. Decrementul logaritmic:

$$\delta = \alpha T_1 = 2\pi\alpha/\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} =$$

$$= (\pi R/L)/\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$$



b) dacă $\omega_0 = \alpha$ $(R = 2\sqrt{L/C})$ amortizarea este aperiodică critică:

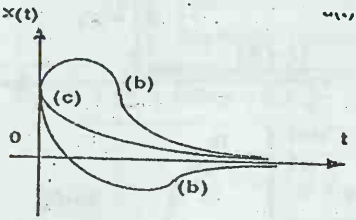
BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

este:

$x_{(t)} = (C_1+C_2t)\, e^{-bt}$

c) dacă $\omega_0 < b$ (frecare mare) mişcarea este aperiodică de forma:

$x_{(t)} = e^{-bt}\,(C_1 e^{-\sqrt{b^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}\,t})$



$q_{(t)} = (C_1 + C_2t)\, e^{-(R/2L)\,t}$

c) dacă $\omega_0 < \alpha$ $(R > 2\sqrt{L/C}$, rezistenţă mare) mişcarea este aperiodică:

$q_{(t)} = e^{-R/2L\,t}\,(C_1 e^{-\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2}\,t})$

Bilanţul energetic al oscilaţiilor amortizate

Pornind de la ecuaţia de mişcare şi amplificînd cu v dt şi obţinem succesiv:

$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \;\big|\; v\,dt$

$m(dv/dt)vdt + rv(dx/dt)dt + kx(dx/dt)dt = 0$

$mvdv + kxdx = -rvdx$

$d(mv^2/2 + kx^2/2) = -F_f\,dx = dL_f$

Pentru valori între două stări:

$$\Delta(Ec + Ep) = \Delta Em = L_f < 0$$
$$1\to 2 \qquad 1\to 2 \qquad 1\to 2$$

Concluzia: energia mecanică descreşte pe seama lucrului mecanic disipat prin frecare. Cauza amortizării este de frecare fluidă.

Pornind de la legea lui Ohm scrisă sub forma :

$L(di/dt) + Ri + q/C = 0$

pe care amplificînd-o cu i dt obţinem succesiv:

$L(di/dt)\,idt + Ri^2\,dt + q/C(dq/dt)dt = 0$

$d(Li^2/2 + q^2/2C) = -Ri^2dt = d\,W_{\mathcal{J}}$

sau trecînd la variaţia mărimilor între două stări:

$\Delta(W_{mg} + W_{el}) = W_{\mathcal{J}} < 0$

Energia electromagneticăa sistemului descreşte în timp pe seama pierderilor de căldură prin efectul Joule în rezistenţa electrică.

Mărimi analoge

coeficientul de frecare fluidă	r(Ns/m) ⟷ R(Ω)	rezistenţa electrică
lucrul mecanic al forţei de frecare		energia (elementară) disipată prin efect

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY
B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

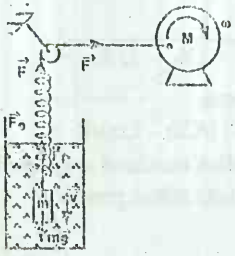
Mărimi analoge

elementar ($\mathcal{L}$) | Joule în rezistor ($\mathcal{J}$)

$$dL_f = -rvdx = -rv^2dt \quad \longleftrightarrow \quad dW_{\mathcal{J}} = -Ri^2dt$$

3) oscilaţiile întreţinute

a) Oscilaţii cu frecare întreţinute printr-o forţă perturbatoare sinusoidală.



Ecuaţia de mişcare a masei m supuse forţelor elastică, de frecare şi de întreţinere:

$m\vec{a} = \vec{F}_f + \vec{F}_e + \vec{F}$

care devine:

$\ddot{x} + (r/m)\dot{x} + \omega_0^2 x = (Fo/m)\sin\omega t \quad (1)$

unde ω - pulsaţia variabilă a forţei perturbatoare.

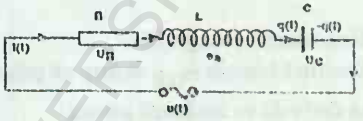
În regim tranzitoriu soluţia ecuaţiei (1) se compune din soluţia generală a ecuaţiei omogene (ce descrie oscilaţiile libere amortizate) şi o soluţie particulară a ecuaţiei complete ce reprezintă tocmai oscilaţiile forţate - După amortizarea oscilaţiilor proprii sistemul trece în regim staţionar unde soluţia propusă ecuaţiei (1) este:

$x_{(t)} = A\sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$

unde A şi φ sînt funcţii de pulsaţia forţei perturbatoare. Determinarea lor se face, de exemplu, din diagrama fazorială construită pentru ecuaţia (1):

Rezultă:

b) Oscilaţii electrice într-un circuit serie RLC întreţinute de o tensiune sinusoidală (alternativă)



Tensiunea aplicată fie de forma:

$u_{(t)} = U\sqrt{2}\sin\omega t$

Legea lui (Kirchhoff):

$-L\,di/dt + u_{(t)} = q/C + Ri$

devine:

$L\,di/dt + Ri + q/C = U\sqrt{2}\sin\omega t \quad (1)$

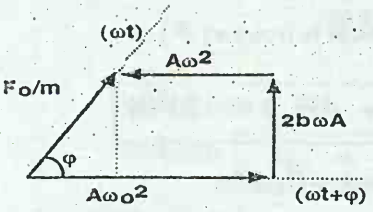
După stingerea rapidă ($e^{-(R/2L)t}$) a oscilaţiilor amortizate proprii în regim tranzitoriu, se impune frecventa tensiunii unor oscilaţii de amplitudine constantă în regim permanent. Oscilaţiile de curent au forma:

$i_{(t)} = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$

unde I şi φ sînt funcţii de pulsaţia generatorului.

Ele se determină din diagrama Fresnel construită pentru ecuaţia (1):

BCU "CAROL I" - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



$$A_{(\omega)} = (F_0/m)/\sqrt{4b^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

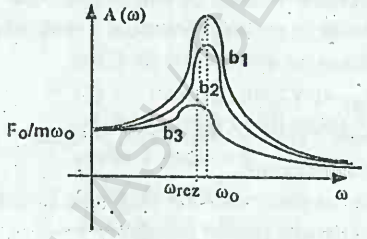
și $\quad tg\varphi_{(\omega)} = 2b\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$

Rezonanța elongațiilor

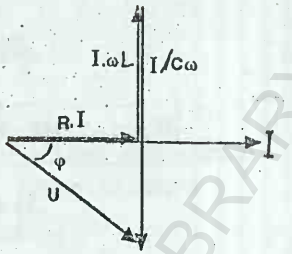
Studiind funcția $A_{(\omega)}$ vedem că prima sa derivată se anulează pentru $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$, punct în care amplitudinea oscilații devine maximă. Fenomenul se numește rezonanță, iar pulsația forței pertubatoare corespunzătoare maximului – pulsație de rezonanță. Se observă că acest maxim este cu atît mai ascuțit, cu cît frecarea este mai mică:

$$A_{max} = F_0/r\sqrt{\omega^2 - b^2}$$

fapt ilustrat de curbele de rezonanță din figură, trasate pentru $b_1 < b_2 < b_3$



Graficele corespunzătoare pentru $\varphi_{(\omega)}$ ne arată saltul de fază în vecinătatea rezonanței, cu atît mai brusc cu cît



Notăm $L\omega = X_L$, $1/C\,\omega = X_C$

și găsim pentru amplitudinea intensității

$$I_{(\omega)} = U/\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

sau

$$I_{(\omega)} = U/\sqrt{R^2 + (X_L - 1/X_C)^2}$$

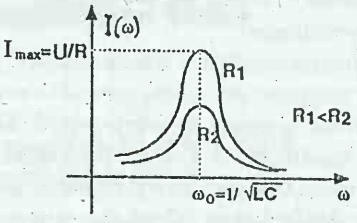
iar pentru defazaj:

$$tg\varphi = (1/C\omega - L\omega)/R$$

Rezonanța, adică maximul amplitudinii intensității este atinsă pentru $\omega_{rez} = \omega_0$:

$$I_{max} = U/R$$

iar $\varphi_{rez} = 0$, adică tensiunea și curentul sînt în fază.

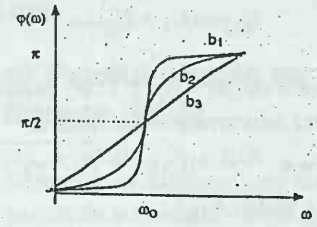


De observat că rezonanța este cu atît mai „ascuțită" cu cît rezistența circuitului este mai mică.

Pentru $\omega < \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $X_C > X_L$ circuitul este capacitiv, $\varphi > 0$, intensitatea este în avans de fază față de tensiune, iar pentru $\omega > \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $X_C < X_L$ circuitul este inductiv, $\varphi < 0$ și intensitatea este defazată în urma

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

coeficientul de amortizare e mai slab:



Rezonanța vitezelor adică atingerea maximului amplitudinii vitezei:

$$v_{(t)} = V \cos(\omega t + \varphi)$$

are loc pentru $\omega_{rez} = \omega_0$.

Într-adevăr, din diagrama construită pentru viteză reiese:

$$V_{(\omega)} = F_0\, \omega / m \sqrt{4b^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

al cărui maxim este atins cînd derivata în raport cu ω se anulează, adică la ω_0.

(analog cu rezonanța circuitului RLC serie) așa încît:

$V_{max} = V_{(\omega\, rez)} = F_0/2bm = F_0/r$

iar $\varphi = -\pi/2$, deci viteza va fi atunci în fază cu forța exterioară

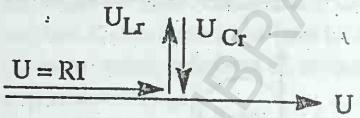
$v_{(t)} = V_{max} \sin \omega_0 t$

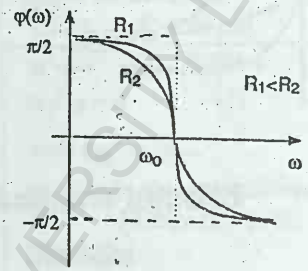
Semilărgimea curbei de rezonanță $(\Delta\omega)/2 = b = r/2m$ se definește așa încît $V(\omega \pm b) = V_{max}/\sqrt{2} = 0{,}707 \cdot F_0/r$

tensiunii.

La rezonanță $X_L = X_C$, iar $\varphi = 0$

În consecință tensunile $U_{Lrez} = U_{Crez}$ sînt egale, dar în opoziție de fază deci $U = RI = (U_R)_{rez}$.





Se definește factorul de calitate al circuitului:

$Q = (U_L)r/U = (U_C)r/U = (1/R)\sqrt{L/C}$

Semilărgimea curbei de rezonanță

$(\Delta\omega)/2 = |\omega_{1,2} - \omega_0| = R/2L$

pentru pulsațiile $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm R/2L$

$I_{(\omega_{1,2})} = I_{max}/\sqrt{2} = 0{,}707\, I_{max} =$

$= 0{,}707\, U/R$

Mărimi analoge

amplitudinea vitezei

$$V_{(\omega)} = F_0\, \omega / m \sqrt{4b^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} = F_0 / \sqrt{r^2 + (m\omega - k/\omega)^2}$$

amplitudinea intensității

$$I_{(\omega)} = U / \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

forța pertubatoare (întreținere) $F_0 \sin\omega t$ ⟷ $U \sin\omega t$ tensiunea sinusoidală aplicată

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Mărimi analoge

reactanța inerțială	$X_m = m\omega$ ⟷ $X_L = L\omega$	reactanță inductivă
reactanța elastică	$X_{el} = k/\omega$ ⟷ $X_C = 1/C\omega$	reactanța capacitivă
impedanța mecanică		impedanța electrică

$$Z_m = \sqrt{r^2 + (m\omega - k/\omega)^2} \longleftrightarrow Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

$$V = F_0 / Z_m \longleftrightarrow I = U/Z \quad \text{(legea Ohm în c.a.)}$$

Bilanțul energetic al oscilațiilor întreținute

Amplificînd ecuația de mișcare cu v.dt obținem:

$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t = F_{(t)} \mid \cdot v.dt$

$mvdv + F_f dx + Kx\,dx = Fdx$

adică:

$d(mv^2/2 + kx^2/2) = dL_F + dL_f$

sau:

$\Delta E_m = L_F + L_f$

Variația energiei mecanice totale este egală cu suma lucrurilor mecanice ale forțelor neconservative: de întreținere ($L_f > 0$) și de frecare ($L_F < 0$). În regim permanent, cînd sistemul efectuează oscilații forțate energia sa rămîne constantă ($L_F = L_f$, $\Delta E_m = 0$) fiindcă energia disipată prin frecare este compensată de la sursa forței exterioare. Puterea medie disipată egală cu puterea medie dezvoltată de forța activă va avea expresia:

$$\overline{P(\omega)} = r\,\overline{v^2_{(t)}} =$$

$$= rF_0^2 / 2\,[r^2 + (\omega m - K/\omega)]$$

În ecuația (1) amplificăm cu $idt = dq$ și obținem:

$L\,di/dt \cdot idt + q/c \cdot dq = -Ri^2dt + Uidt$

$d(Li^2/2 + q^2/2C) = dW_\varphi + dW_{gen}$

sau

$\Delta W_{elmg} = W_\varphi + W_{gen}$

adică variația energiei electromagnetice a circuitului oscilant are loc pe seama căldurii Joule disipate în rezistența electrică și a energiei furnizate de generatorul de tensiune sinusoidală. În regim permanent $W_\varphi + W_{gen} = 0$

cele două energii se compensează așa încît energia cîmpului electromagnetic se menține constantă.

Puterea medie disipată este egală cu puterea medie absorbită de la sursă și se numește puterea activă:

$P = \overline{P(\omega)} = R\,\overline{i^2_{(t)}} = UI\cos\varphi$

unde $\cos\varphi = RI/U$ pentru circuitul serie și se numește factor de putere

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

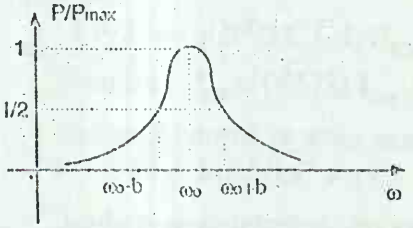
În vecinătatea rezonanței vitezelor și pentru r mic:

$P(\omega) = F_0^2 / 2r\,[1+(\omega - \omega_0)^2/b^2]$

La rezonanță puterea devine maximă

$P_{max}(\omega = \omega_0) = F_0^2 / 2r$

În banda de frecvențe $2|\omega - \omega_0| = 2b$ puterea disipată (sau absorbită) și reduce la jumătate din P_{max} (v. fig.)



La rezonanță $\cos\varphi = 1$ și puterea maximă:

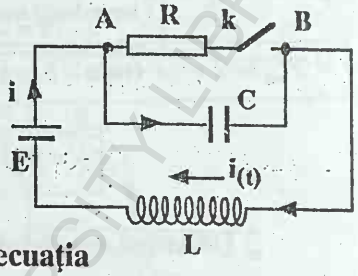
$P_{max} = R\,I^2_{max} = U^2/R$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

OSCILAȚII ELECTROMAGNETICE

1 Se știe că un condensator legat în paralel cu un întrerupător împiedică formarea arcului electric. Pentru a lămuri rolul condensatorului să se calculeze tensiunea $u_{(t)}$ între punctele A și B după deschiderea întrerupătorului K din figură. Se cunosc R,C,L și E. Determinați și curentul prin circuit $i_{(t)}$.



REZOLVARE

Din legea lui Kirchhoff rezultă ecuația
$E - L(di/dt) = q/C$ cu $i = dq/dt$, care devine :

$$d^2q/dt^2 + (1/LC)q = E/L$$

Soluția sa este de forma : $q_{(t)} = Q_m \sin(\omega t + \varphi) + EC$
o suprapunere între soluția generală a ecuației omogene, cu pulsația $\omega = 1/\sqrt{LC}$ și o soluție particulară a ecuației neomogene : Intensitatea curentului va fi:

$$i_{(t)} = dq_{(t)}/dt = Q_m \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Punînd condițiile inițiale $t_0 = 0$, $i_{(0)} = E/R$ și $q_{(0)} = EC$ găsim : $\varphi = 0$, $Q_m = E\sqrt{LC}/R$ și $I_m = Q_m \omega = E/R$

Așadar:

$$q_{(t)} = (E\sqrt{LC}/R) \sin(1/\sqrt{LC})\, t + EC$$

$$i_{(t)} = (E/R) \cos(1/\sqrt{LC})\, t$$

și $$u_{(t)AB} = q_{(t)}/C = E\,[1 + (1/R)\sqrt{L/C} \sin(1/\sqrt{LC})t]$$

În absența condensatorului ($C \to 0$) tensiunea între contactele întrerupătorului ia valori mari, ceea ce conduce la formarea arcului.

BCU CLUJ / UNIVERSITY LIBRARY

2. Se dă circuitul oscilant din figură, în care se cunosc capacităţile C ale celor doi condensatori identici şi inductanţa bobinei L. Iniţial comutatorul dublu K este închis, iar intensitatea curentului prin bobină în cursul oscilaţiilor libere este descrisă de ecuaţia:

$i = I_m \cos \omega t$, unde I_m este cunoscut.

a) La momentul t = T/4 se deschide comutatorul dublu K. Să se scrie ecuaţia curentului prin circuit începînd din acest moment;

b) După o semiperioadă (în noile condiţii), se închide comutatorul dublu K. Cum se modifică intensitatea curentului în circuit?

c) Dacă deschiderea comutatorului K ar fi avut loc la minutul t=T/8 (în loc de T/4) care ar fi fost ecuaţia curentului începînd din acest moment (în continuare K rămîne deschis).

REZOLVARE

a) În prima fază (K închis) pulsaţia $\omega = 1/\sqrt{L2C}$. La momentul T/4,intensitatea este nulă , în schimb sarcinile sînt maxime pe condensatoare

$$q_{1max} = q_{2max} = Q_{max}/2 = I_{max}/2\omega = (I_m/2)\sqrt{2LC}$$

Prin deschiderea comutatorului unul din condensatori e scos din circuit, preluînd deci jumătate din energia circuitului.

Noua pulsaţie a circuitului (L,C) va fi $\omega' = 1/\sqrt{LC}$, iar curentul $i'(t) = I_m \sin (t/\sqrt{LC} + \varphi)$. Din noile condiţii iniţiale

$q'_{(0)} = Q_m/2 = (I_m/2)\sqrt{2LC}$ **şi** $i'_{(0)} = 0$ **rezultă** $\varphi = 0$ **iar**

$I_m'/\omega' = Q'_m = (I_m/2)\sqrt{2LC}$ $\quad i'_{(t)} = (\sqrt{2}/2)\, I_m \sin (t/\sqrt{LC})$

b) După o semiperioadă ($T'/2 = \pi\sqrt{LC}$) intensitatea este din nou zero, iar condensatorul încărcat cu polaritate inversă. Prin închiderea comutatorului cele două condensatoare vor tinde să ajungă la echilibru şi îşi vor neutraliza sarcinile ($q_{1m} - q_{2m} = 0$) **deci i = 0 , oscilaţiile se sting.**

BCU / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) La momentul $t = T/8$, intensitatea de la început va avea valoarea $i = I_{max} \cos 2\pi T/8 = I_{max} \sqrt{2}/2$

Sarcinile pe condensatori se calculează uşor din conservarea energiei $q^2/4\,C + Li^2/2 = L\,I_{max}^2/2$, fiecărui condensator îi va reveni $q/2 = I_{max} \sqrt{LC}/2$

Prin decuplarea unui condensator pulsaţia devine $\omega = 1/\sqrt{LC}$ Amplitudinea curentului se calculează energetic

$$Li^2/2 + (q/2)^2/2\,C = L\,I'^2_{max}/2$$

Rezultă : $I'_{max} = (\sqrt{3}/2)\,I_{max}$,

iar noul curent va avea ecuaţia :

$i' = \sqrt{3}\,I_{max} \sin(t/\sqrt{LC} + \varphi)/2$

unde φ se determină din valoarea iniţială $i_{(0)} = I_{max}\sqrt{2}/2$

Rezultă $\sin \varphi = \sqrt{2}/3$

Aşa încît expresia curentului:

$i_{(t)} = \sqrt{3}\,I_{max} \sin(t/\sqrt{LC} + \arcsin \sqrt{2}/3)/2$

3. Un generator electric este legat în serie cu o bobină idală şi un condensator.

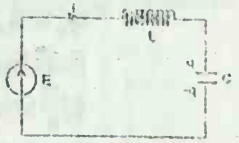
a) Deduceţi expresiile intensităţii curentului după închiderea circuitului şi a tensiunii la bornele condensatorului.

b) În momentul în care sarcina condensatorului este maximă se inversează bornele sale. Cît va fi curentul maxim prin circuit?

c) Care va fi curentul maxim dacă manevra de la punctul b se repetă de n ori? Dar tensiunea maximă la bornele condensatorului?

Se cunosc E, L, C.

REZOLVARE



a) Din legea lui Ohm se obţine ecuaţia:

$E - L di/dt = q/C$.

Cu schimbarea de variabilă $q' = q - CE$, ţinînd cont că

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$i = dq/dt = dq'/dt$ și $di/dt = d^2q'/dt^2$, ecuația poate fi pusă sub forma: $d^2q'/dt^2 + q'/LC=0$

Soluțiile vor fi $q'= Q_0\sin(\omega t+\varphi_0)$, cu $\omega = 1/\sqrt{LC}$

Constantele Q și φ_0 se determină folosind condițiile inițiale: la $t = 0$, $q = 0$ și $i = 0$. Se obține sistemul:

$0 = CE+Q_0\sin\varphi_0$

$0 = \omega Q\cos\varphi_0$

de unde avem $Q_0= CE$, $\varphi_0 = -\pi/2$, astfel încît putem scrie în final:

$q=CE\,(1-\cos\omega t)$

$i=E\sqrt{C/L}\,\sin\omega t$

$u_c=E(1-\cos\omega t)$

b)Sarcina condensatorului va fi maximă la $t = T/2$ $q_0=2CE$, $i = 0$. Inversarea bornelor condensatorului înseamnă alte condiții inițiale: $t = 0$, $q = -q_0= -2CE$, $i = 0$, adică:

$-2CE=CE+Q_1\sin\varphi_0$

$0 = \omega Q_1\cos\varphi_0$, de unde $\varphi_0= -\pi/2$, $Q_1 = 3CE$

Curentul prin circuit va avea intensitatea maximă

$I_1= \omega Q_1= 3E\sqrt{C/L}$

c) După n-1 manevre sarcina maximă este q_{n-1}. La a n-a manevră avem:

$-q_{n-1}= CE + Q_n\sin(\omega t+\varphi_0)$

$0 = \omega Q_n\cos\omega t$, de unde $\varphi_0 = -\pi/2$,

$Q_n= q_{n-1} + CE$. Sarcina variază după legea:

$q = CE - (q_{n-1}+ CE)\cos\omega t$, iar valoarea maximă va fi

$q_n = q_{n-1} + 2CE$

Sarcina maximă va fi $q_n=2(n+1)CE$, tensiunea maximă

$U_n = q_n/C = 2(n+1)E$, amplitudinea oscilațiilor sarcinii $Q_n=(2n+1)CE$, intensitatea maximă $I_n=\omega Q_n= (2n+1)E\sqrt{C/L}$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

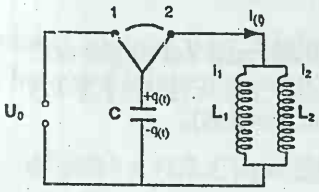
4. Un condensator cu capacitatea C se descarcă prin două bobine ideale de inductanțe L_1 și respectiv L_2, legate în paralel. Cunoscînd amplitudinea curentului prin prima bobină I_1m, determinați:

a) sarcina inițială a condensatorului

b) perioada oscilațiilor

c) dependența de timp a sarcinii de pe armăturile lui C și a intensităților celor doi curenți prin bobine.

REZOLVARE



a) Tensiunile electromotoare autoinduse sînt egale:

$e_{a1} = e_{a2} = -L_1 di_1/dt = -L_2 di_2/dt$

Legea lui Kirckhoff la momentul t:

$u_c = e_{a1} = e_{a2}$,

$-L_1 di_1/dt = -L_2 di_2/dt = q/C$

Curenții și sarcina sînt legați prin relația $i_1 + i_2 = dq/dt = i$

Conservarea energiei electrice între momentele $t_0 = 0$ **și t:**

$W_0 = W$ **revine la** $Q_0^2/2C = L_1 I_1^2 m/2 + L_2 I_2^2 m/2$ **întrucît maximul curentului i1 este atins concomitent cu cel al lui i2 și coincid cu anularea sarcinii de pe C (** $di_2/dt = 0 \Rightarrow di_1/dt = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow q = 0$)

Cum tensiunile la bornele bobinelor sînt egale în orice moment (la $t_0 = 0$ **erau nule) rezultă** $L_1 I_1 m = L_2 I_2 m$

Se obține $Q_0 = I_1 m \sqrt{CL_1(L_1+L_2)/L_2}$

b) Amplitudinea curentului principal

$Im = I_1 m + I_2 m = I_1 m (L_1+L_2)/L_2$

este legată de Q_0 **prin rel.** $I m = \omega Q_0$, **deoarece:**

$q_{(t)} = Q_0 \sin(\omega t+\varphi)$

$i_{(t)} = dq/dt = Q_0\omega \cos(\omega t+\varphi) = Im \cos(\omega t+\varphi)$

Deducem $\omega = 1/\sqrt{CL_1L_2/(L_1+L_2)}$, **cele două bobine legate**

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în paralel se comportă ca una singură cu inductanța echivalentă

$L_e = L_1L_2/(L_1+L_2)$

Din condițiile inițiale ($t_0 = 0$, $i_0 = 0$, $q_0 = Q_0$)

rezultă oscilația sarcinii:

$q_{(t)} = I_1m \sqrt{CL_1(L_1+L_2)/L_2} \cos \sqrt{(L_1+L_2)/CL_1L_2}\, t$

și a intensităților:

$i_{1(t)} = I_1m \sin \sqrt{(L_1+L_2)/CL_1L_2}\, t$

$i_{2(t)} = I_1m\, (L_1/L_2) \sin \sqrt{(L_1+L_2)/CL_1L_2}\, t$

c) Analogul mecanic e sistemul de 2 mase m_1 , m_2 legate prin resortul elastic (k) pentru care mișcarea relativă este descrisă de

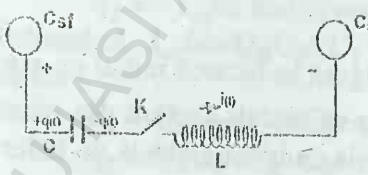
$x_{rel(t)} = x_0 \sin(t \sqrt{k/\mu} + \varphi)$ cu $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$ masa redusă analoagă inductanței echivalente L_e.

5 Două sfere conductoare, depărtate, de rază R sînt unite printr-o porțiune de circuit, conținînd un condensator cu capacitatea C , o bobină cu inductanța L și un întrerupător K. La momentul inițial condensatorul este încărcat la tensiunea U_0 , iar sferele sînt neutre.

Determinați valoarea maximă a intensității curentului în circuit, după închiderea întrerupătorului. Bobina se consideră ideală.

(Kvant , O.F. Etapa județeană Buc.1993)

REZOLVARE



După închiderea întrerupătorului capacitatea echivalentă a sistemului devine:

$C_e = C + C_{sf}/2 = C + 2\pi\varepsilon_0 R$

deoarece cele 2 sfere depărtate formează un sistem echivalent de două condensatoare legate în serie, fiecare cu

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

capacitatea $C_{sf} = 4\pi\varepsilon_0 R$ iar ansamblul lor în serie cu C.
Conservarea energiei ne conduce la:

$$CU_0^2/2 = LI\ m^2/2 + q_0^2/2C_e$$

unde q_0 este sarcina de pe condensatoare în momentul trecerii curentului maxim prin bobină.

Cum și sarcina totală trebuie să se conserve rezultă $q_0 = CU_0$ și de aici:

$$LI\ m^2/2 = CU_0^2/2 - C^2U_0^2/2(C+2\pi\varepsilon_0 R) =$$

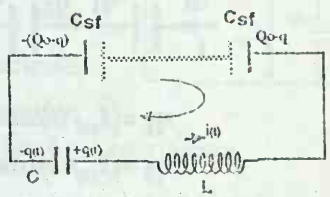
$$= (CU_0^2/2)\ (2\pi\varepsilon_0 R/\ C + 2\pi\varepsilon_0 R)$$

găsim amplitudinea intensității

$$Im = U_0 \sqrt{2\pi\varepsilon_0 RC/(C+2\pi\varepsilon_0 R)L}$$

La același rezultat se ajunge găsind pulsația de oscilație a sarcinii de pe condensator, din ecuația diferențială corespunzătoare legii lui Ohm:

$$-Ldi/dt = q/C - (Q_0 - q)/C_{sf}/2$$



Am notat prin $Q_0 = CU_0$ sarcina inițială pe C.

De aici:

$$d^2q/dt^2 = -q(2\pi\varepsilon_0 R + C)/C2\pi\varepsilon_0 RL + Q_0/2\pi\varepsilon_0 RL$$

rezultă pulsația $\omega_0 = \sqrt{(2\pi\varepsilon_0 R + C)/2\pi\varepsilon_0 RCL}$ și soluția:

$$q_{(t)} = Q_{1m} \sin(\omega_0 t + \varphi) + Q_0 C/Ce$$

iar $i_{(t)} = Q_{1m} \cos(\omega_0 t + \varphi) = dq/dt$

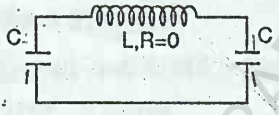
Punînd condițiile inițiale $t_0 = 0$, $q_{(0)} = CU_0$, $i_{(0)} = 0$ găsim $Q_{1m} = (Q_0/Ce)2\pi\varepsilon_0 R$, iar de aici:

$$Im = Q_{1m}\ \omega_0 = U_0 \sqrt{2\pi\varepsilon_0 RC/(C+2\pi\varepsilon_0 R)L}$$

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6. a) Găsiți frecvența proprie a circuitului oscilant din figură și dependența de timp a intensității curentului prin bobină.

b) Ce sarcină se află pe fiecare condensator în momentul cînd intensitatea atinge valoarea sa maximă? Calculați valoarea maximă a intensității curentului.



c) Evoluția sarcinilor în funcție de timp $q_{1(t)}$ și $q_{2(t)}$ considerînd q_0 sarcina inițială cu care a fost încărcat unul din condesatoare.

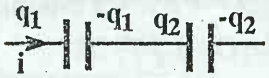
d) Găsiți analogul mecanic al circuitului din figură

REZOLVARE

a) Gruparea serie a celor doi condesatori este echivalentă cu un condesator avînd capacitatea $C_s = C/2$, astfel încît putem scrie expresia frecvenței:

$$\nu = 1/2\pi\sqrt{LC_s} = \sqrt{2}/2\pi\sqrt{LC}$$

Intensitatea curentului prin bobină va fi de forma :



$$i_{(t)} = I_m \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ cu } \omega = \sqrt{2/LC}$$

b) Observînd că $i = dq_1/dt = dq_2/dt$, **se va putea scrie :**

$$q_1 = (I_m/\omega)\sin(\omega t + \varphi_0 - \pi/2) + q_{01} ,$$

$$q_2 = (I_m/\omega)\sin(\omega t + \varphi_0 - \pi/2) + q_{02}$$

Cînd $i = I_m$, $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$, **deci** $\sin(\omega t + \varphi_0 - \pi/2) = 0$

De asemenea, în acest moment tensiunea la bornele bobinei, deci și la bornele condensatorului echivalent, este 0. Sarcinile pe condensatori au valorile: $q_1 = q_{01}$, $q_2 = q_{02}$ **care satisfac condiția**

$$U = q_1/C_1 + q_2/C_2 = 0 , \text{ adică } q_{01} + q_{02} = 0$$

Determinarea valorilor sarcinilor q_{01} **și** q_{02} **se va face pe baza condițiilor inițiale.**

c) Condițiile inițiale : $t = 0$, $i = 0$, $q_1 = q_0$, $q_2 = 0$ **conduc la sistemul:**

BCU BUCUREȘTI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$I_m \sin\varphi_0 = 0$,

$(I_m/\omega)\sin(\varphi_0 - \pi/2) + q_{01} = q_0$

$(I_m/\omega)\sin(\varphi_0 - \pi/2) + q_{02} = 0$

de unde $\sin\varphi_0 = 0$, $2I_m/\omega + q_{01} + q_{02} = q_0$

Punînd $q_{01} + q_{02} = q_0$, găsim $\sin(\varphi_0 - \pi/2) = 0$, deci $\varphi_0 = \pi$

$$I_m = \omega q_0/2 = q_0\sqrt{2LC}$$

Prin scăderea ultimelor două ecuații rezultă $2q_{01} = q_0$,

$$q_{01} = q_0/2 = q_{02}$$

Se obțin expresiile:

$$q_1 = (q_0/2)\cos\omega t + q_0/2 = (q_0/2)(\cos\omega t + 1)$$

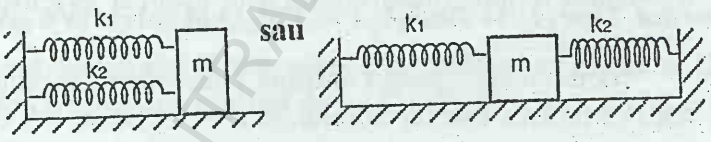
$$q_2 = (q_0/2)\cos\omega t - q_0/2 = (q_0/2)(\cos\omega t - 1)$$

d) Ecuației tensiunilor :

$e_L = U_1 + U_2$, sau

$-Ldi/dt = q_1/C_1 + q_2/C_2$, îi va corespunde ecuația fundamentală de forma :

$ma = -k_1x_1 - k_2x_2$, care corespunde unui corp de masă m legat cu două resorturi:



În condițiile punctului c) , unul din resoarte ar fi alungit la momentul inițial cu x_0, iar celălalt netensionat.

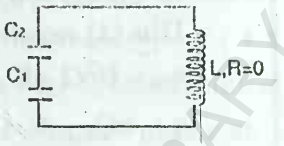
7 Condesatorul C_1 din figură se încarcă inițial cu sarcina Q_0, apoi se descarcă printr-un circuit alcătuit din condesatorul C_2, inițial descărcat montat în serie cu bobina ideală de inductanță L. Să se determine :

BCU TSI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a) valoarea maximă a intensității curentului din circuit după închiderea întrerupătorului;

b) pulsația proprie a circuitului;

c) dependența de timp a mărimilor: q_1 și q_2.



REZOLVARE

Condesatorul echivalent grupării are capacitatea echivalentă $C_s = C_1C_2/(C_1+C_2)$ fiind inițial încărcat la $U_0 = Q_0/C_1$, care reprezintă în același timp tensiunea maximă la bornele bobinei.

b) În circuit au loc oscilații armonice cu pulsația

$$\omega = 1/\sqrt{LC_s} = \sqrt{(C_1+C_2)/LC_1C_2}$$

a) intensitatatea curentului în circuit este de forma

$$i = I_m \sin(\omega t+\varphi_0)$$

Din legea autoinducției $e_L = -Ldi/dt = U_L$, deci tensiunea la bornele bobinei va fi de forma

$U_L = -LI_m\omega \sin(\omega t+\varphi_0+\pi/2)$ **. Punînd $U_{Lm} = U_0$, avem:**

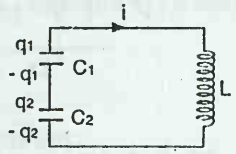
$$\omega LI_m = Q_0/C_1, \text{ de unde } I_m = Q_0/LC_1\omega =$$

$$= (Q_0/LC_1)\sqrt{LC_1C_2/(C_1+C_2)},$$

deci $I_m = Q_0\sqrt{C_2/LC_1(C_1+C_2)}$

c) Din $i = -dq_1/dt = -dq_2/dt$,

(semnul rezultă din sensul ales: i este curentul de descărcare al condensatorilor) rezultă expresiile sarcinilor:



$$q_1 = -I_m/\omega \sin(\omega t+\varphi_0-\pi/2)+q_{01},$$

$$q_2 = -I_m/\omega \sin(\omega t+\varphi_0-\pi/2)+q_{02},$$

Înlocuind $I_m/\omega = Q_0C_2/(C_1+C_2)$ și $\sin(\varphi-\pi/2) = -\cos\varphi$, ecuațiile devin :

$$q_1 = Q_0C_2/(C_1+C_2)\cos(\omega t+\varphi_0)+q_{01},$$

$$q_2 = Q_0C_1/(C_1+C_2)\cos(\omega t+\varphi_0)+q_{02}$$

BCU CLUJ-NAPOCA UNIVERSITY LIBRARY

Din condițiile inițiale : la $t = 0$, $i = 0$, $q_1 = Q_0$, $q_2 = 0$, se obține sistemul:

$$Q_0 = [Q_0C_2/(C_1+C_2)] \cos \varphi_0 + q_{01}$$
$$0 = [Q_0C_2/(C_1+C_2)] \cos \varphi_0 + q_{02}$$
$$0 = I_m \sin\varphi_0,$$

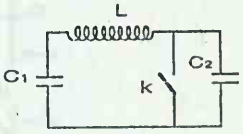
care permite determinarea constantelor: $\varphi_0 = 0$,

$q_{01} = Q_0C_1/(C_1+C_2)$; $q_{02} = -Q_0C_2/(C_1+C_2)$.

În final se obțin:

$$q_1 = [Q_0C_2/(C_1+C_2)] [C_1/C_2 + \cos(t\sqrt{(C_1+C_2)/LC_1C_2})]$$
$$q_2 = [Q_0C_2/(C_1+C_2)] [\cos(t\sqrt{(C_1+C_2)/LC_1C_2}) - 1]$$

8. În circuitul din figură întrerupătorul k este închis și deschis alternativ, în acele momente în care tensiunea pe C_1 devine nulă . Știind că inițial condensatorul C_1 a fost încărcat la tensiunea U_1, să se traseze graficele dependenței de timp a curentului și tensiunii pe bobina L, precum și a tensiunii la bornele fiecărui condesator.



REZOLVARE

Comutarea se face cînd condesatorii sînt descărcați, iar intensitatea curentului maximă , deci energia circuitului ($LI_m^2/2$) și valoarea maximă a intensității nu se modifică .

Cînd întrerupătorul este închis , capacitatea este C_1 (C_2 fiind scurtcircuitat), vom avea $\omega_1 = 1/\sqrt{LC_1}$, $q_m = I_m/\omega_1$,

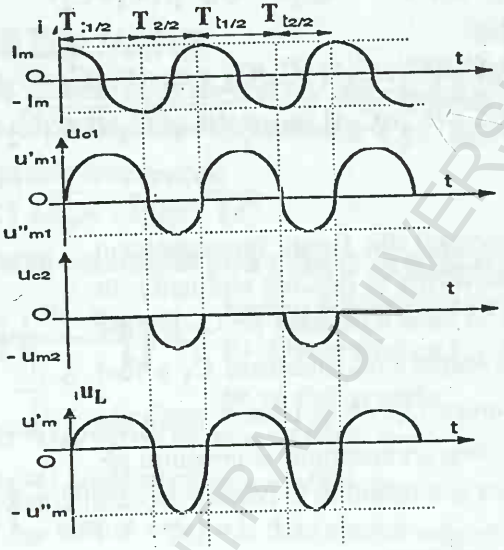
$$U_m = q_m/C_1 = I_m\sqrt{L/C_1}, \quad U_m = U_{Cm1} = U_{Lm}.$$

Comutarea se face după $T_1/2 = \pi\sqrt{LC_1}$

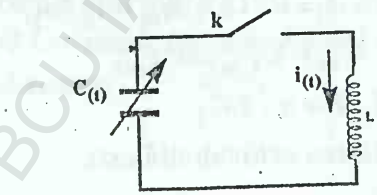
Cu întrerupătorul deschis, capacitatea echivalentă este $C_s = C_1C_2/(C_1+C_2)$ Avem:

BCU "LUCIAN BLAGA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\omega_2 = \sqrt{(C_1+C_2)/LC_1C_2}$, $q_m = I_m/\omega_2$, $U_{m1} = q_m/C_1 =$
$= I_m \sqrt{LC_2/C_1(C_1+C_2)}$, $U_{m2} = q_m/C_2 = I_m \sqrt{LC_1/C_2(C_1+C_2)}$,
$U_{Lm} = U_{mC_1} + U_{mC_2} = I_m \sqrt{L(C_1+C_2)/C_1C_2}$,
Comutarea se repetă după $T_2/2 = \pi \sqrt{LC_2C_1/(C_1+C_2)}$
Reprezentările grafice:



9. Care trebuie să fie dependența de timp a capacității condesatorului variabil din montajul alăturat, pentru ca , după închiderea întrerupătorului, curentul prin bobină să crească direct proporțional cu timpul t? La momentul inițial $t_0 = 0$ capacitatea era C_0.



REZOLVARE

Fie curentul de forma $i_{(t)} = I\,t(1)$ **unde I este o constantă.**

Avem $e_a = u_c$ **, la orice moment**

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de timp:

$-L(di/dt) = q_{(t)}/C_{(t)}$ (2)

Din (1) rezultă $di/dt = I$ = ct. și deoarece $i=dq/dt$ rezultă $q_{(t)}= It^2/2 +B$, unde I și B sînt două constante. La $t_0=0$ $q_{(0)}=Q_0$, deci $q_{(t)}= It^2/2 +Q_0$

Din (2) rezultă $(It^2/2 +Q_0)/C(t)= -LI$, de unde

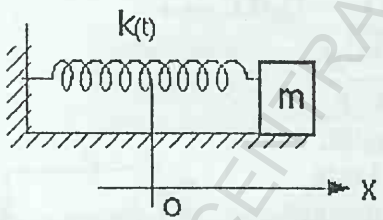
$$C_{(t)}= (-It^2/2 +Q_0)/ LI , \text{ deci } C_{(t)}= -t^2/2L +Q_0/ LI$$

Cum la $t_0=0$ capacitatea $C_{(0)}=C_0$ rezultă $C_0 = Q_0/ LI$, adică $I = Q_0/ LC_0$

în felul acesta $C_{(t)}= -t^2/2L +C_0$ și capacitatea trebuie să scadă pătratic cu timpul, iar $i_{(t)}= tQ_0/ LC_0$ curentul variază liniar cu t.

O soluție mai simplă:

Rezultatul poate fi găsit în baza unei analogii mecanice:



Viteza crește liniar în timp, deci mișcarea este uniform variată $v=+at$, $x=x_0+at^2/2$, unde am considerat $v_0=0$.

din ecuația fundamentală $-kx = ma$ se obține $1/k=-x/ma$, sau $1/k=-(x_0+at^2/2) / ma$

Punînd la $t=0$ $k=k_0$ și $x=x_0$ avem $a=-k_0x_0/m$, de unde

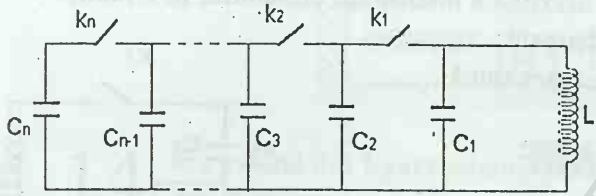
$1/k=1/k_0-t^2/2m$.

Revenind la circuitul electric rezultatul poate fi scris:

$$C=C_0-t^2/2L$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

10. În circuitul oscilant LC_1 din figură valoarea intensității maxime a curentului este I_1. a) Cît devine ea prin închiderea lui k_1 în momentul în care tensiunea pe C_1 era maximă. b) Dar prin închiderea lui k_1 și k_2 tot în momentul atingerii tensiunii maxime pe condesatorul C_1 c) Generalizați pentru închiderea întreruptoarelor $k_1, k_2, ..., k_n$. Înaintea închiderii întrerupătoarelor condesatoarele atașate nu sunt încărcate. Condesatoarele sunt identice.



REZOLVARE

a) La închiderea întrerupătorului k_1 sarcina se distribuie pe ambii condesatori, o parte din energie disipîndu-se la stabilirea echilibrului electrostatic. Din legea conservării energiei: $q^2_m/4C=LI_2^2/2$ (după închiderea întrerupătorului)

$q^2_m/2C=LI_1^2/2$ (înainte de închidere)

rezultă $I_2=I_1/\sqrt{2}$

b) La închiderrea întrerupătorului k_2 sarcina q se distribuie pe trei condesatori:

$q^2_m/6C = LI_3^2/2$, de unde $I_3=I_1/\sqrt{3}$

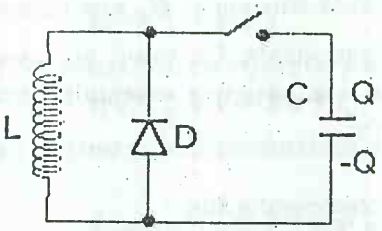
c) Pentru n întrerupătoare închise avem:

$q^2_m/2nC = LI_n^2/2$, deci $I_n=I_1/\sqrt{n}$

11. Pentru circuitul din figură, studiați și reprezentați grafic intensitățile curenților și tensiunea la bornele condesatorului după închidera întrerupătorului. Toate elementele de circuit sunt ideale.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

REZOLVARE



La închiderea circuitului dioda este blocată încît se poate scrie:

$u_c=(Q/C)\cos\omega t$

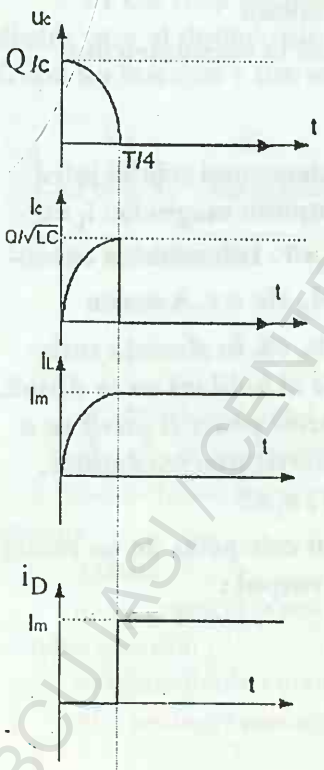
$i_c=i_L=I_m\sin\omega t$

$i_D=0$

unde $\omega=1/\sqrt{LC}$, $Im=Q/\sqrt{LC}$.

Dioda se deschide cînd $u_D=0$, adică la $t=T/4=\pi\sqrt{LC}/2$.

Din acest moment condesatorul nu se mai încarcă, $i_c=0$, $u_c=0$, $i_L=i_D=I_m$



BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

12. Un condensator, încărcat la tensiunea U_0, este conectat la bornele unei bobine ideale. Ce valori vor avea tensiunea la bornele condensatorului și intensitatea curentului prin bobină dacă, după un interval de timp τ:

a) se întrerupe circuitul;

b) se scurtcircuitează bornele condensatorului

REZOLVARE

După închiderea circuitului se produc oscilații electromagnetice:

$u_c = U_0 \cos \omega t$

$i_L = I_0 \sin \omega t$,

cu $\omega = 1/\sqrt{LC}$ și $I_0 = U_0 / \sqrt{L/C}$

Dacă comutarea se face brusc (timp de comutare mult mai mic decît perioada oscilațiilor electromagnetice):

a) Condensatorul rămîne încărcat la tensiumea din momentul întreruperii circuitului:

$u_c = U_0 \cos \omega \tau$

Tensiunea autoindusă în bobină dă naștere unei scîntei între contacte, prin care se disipă energia cîmpului magnetic: $i_L=0$

b) Condensatorul se descarcă $u_c=0$. Intensitatea curentului prin bobină rămîne constantă: $i_L=I_0 \sin \omega \tau$. Aceasta înseamnă, din punct de vedere energetic, că, în absența rezistenței active, energia cîmpului magnetic al bobinei nu se disipă. Dacă comutarea se face mai lent, contactul poate fi privit ca o rezistență variabilă. Aceasta duce la amortizarea oscilațiilor, astfel încît, în final, este posibil ca $i_L=0$, $u_c=0$

Analogie mecanică : Un corp de masă m este prins de un resort alungit inițial cu x_0. După un interval τ corpul :

a) este blocat(ciocnire);

b) se desprinde de resort

BCU "ȘTIINȚIFIC CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

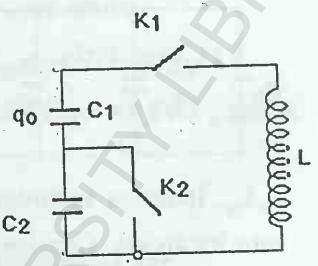
13. În circuitul din figură primul condensator este încărcat inițial cu sarcina q_0, primul întrerupător fiind deschis iar al doilea închis.

La un interval de timp τ după închiderea primului întrerupător se deschide cel de al doilea. Să se găsească :

a) valoarea maximă a intensității curentului în circuit;

b) energia disipată

c) o analogie mecanică



REZOLVARE

a) După închiderea întrerupătorului K_1 se produc oscilații electromagnetice:

$$q_1=q_0 \cos \omega_1 t$$

$$i=I_1 \sin \omega_1 t \text{ , cu } \omega_1=1/\sqrt{LC_1} \text{ și } I_1= q_0/\sqrt{LC_1}$$

În momentul deschiderii întrerupătorului K_2 tensiunea la bornele bobinei este

$u= (q_0/C_1)\cos \omega_1\tau$ **, iar intensitatea curentului electric**

$i =(q_0/\sqrt{LC_1})\sin \omega_1\tau$ **. Capacitatea C_1 este înlocuită de capacitatea echivalentă a grupării serie $C_s= C_1C_2/(C_1+C_2)$, ceea ce duce la modificarea pulsației $\omega= 1/\sqrt{LC_s}$**

Intensitatea curentului va avea în continuare expresia:

$i=I_m \sin (\omega t+\varphi)$**, iar tensiunea la bornele bobinei:**

$$u=-L(di/dt) =-\omega LI_m \sin(\omega t+\varphi+\pi/2)=-\omega LI_m \cos(\omega t+\varphi)$$

Folosind condițiile inițiale:

$$(q_0/C_1)\cos \omega_1\tau=-\omega LI_m \cos\varphi$$

$$(q_0/\sqrt{LC_1})\sin \omega_1\tau =I_m \sin\varphi$$

se obține:

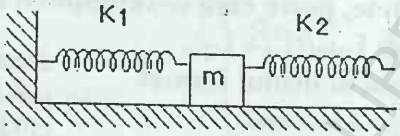
$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1=(q^2_0\cos^2 \omega_1\tau)/_{\omega^2L^2C_1^2I_m^2} + (q^2_0\sin^2\omega_1\tau)/_{LC_1I^2_m}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

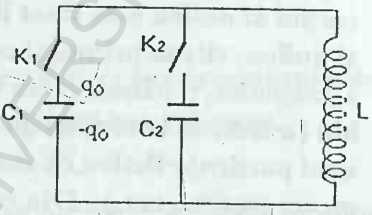
de unde $I_m=(q_0/\sqrt{LC_1})\sqrt{\sin^2\omega_1\tau+C_2\cos^2\omega_1\tau/(C_1+C_2)}$

b) Nu se disipă energie

c) Un corp este legat de două resorturi, primul avînd celălalt capăt fix, al doilea liber. La un interval τ după începerea oscilațiilor, capătul liber al celui de al doilea resort este imobilizat.



14. În circuitul din figură primul condensator este încărcat inițial cu sarcina q_0, ambele întrerupătoare fiind deschise. Al doilea întrerupător este închis la un interval de timp τ după primul.



Să se găsească:

a) valoarea maximă a intensității curentului în circuit;

b) energia disipată;

c) o analogie mecanică.

REZOLVARE

a) După închiderea primului întrerupător, avem:

$q_1=q_0\cos\omega_1 t$, $i=\omega_1 q_0\sin\omega_1 t$, unde $\omega_1=1/\sqrt{LC_1}$

În momentul închiderii celui de al doilea întrerupător, capacitatea echivalentă devine $C_p=C_1+C_2$, încît pulsația va fi

$$\omega=1/\sqrt{L(C_1+C_2)}$$

Sarcina q se distribuie rapid pe ambii condensatori. Condensatorul echivalent este încărcat în acest moment cu

$$q=q_0\cos\omega_1\tau$$

iar prin bobină trece curentul

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$i = \omega_1 q_0 \sin\omega_1\tau$

Din conservarea energiei după închiderea întrerupătorului :

$q^2/2C_p + Li^2/2 = LI_m^2/2$

se obține valoarea maximă a intensității:

$$I_m=(q_0/\sqrt{LC_1})\sqrt{\sin^2\omega_1\tau+C_1\cos^2\omega_1\tau/(C_1+C_2)}$$

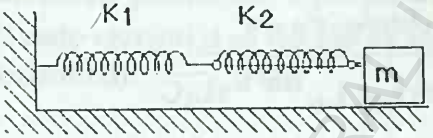
b) Se disipă energie în procesul de redistribuire a sarcinii pe condensatoarele legate în paralel:

$Q=W_{ci}-W_{cf}=q^2/2C_1-q^2/2(C_1+C_2)$, unde $q=q_0\cos\omega_1\tau$

Energia disipată este

$Q=(1/2)[C_2/C_1(C_1+C_2)]\,q_0^2\cos^2\omega_1\tau$

c) Un corp oscilează legat de două resorturi în serie, dintre care al doilea este pus pe o tijă care îl ține netensionat. După un interval τ tija se rupe.



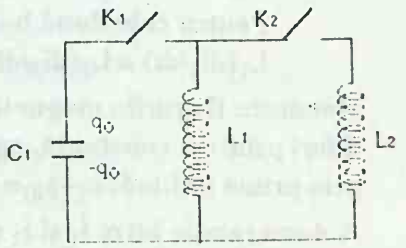
15. În circuitul din figură al doilea întrerupător este închis la un interval τ după primul.

Găsiți:

a) valoarea maximă a sarcinii condensatorului ;

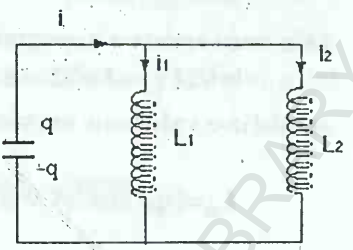
b) intensitățile curenților

c) o analogie mecanică



BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

REZOLVARE



a) În momentul închiderii întrerupătorului K_2 avem:

$q=q_0 \cos\omega_1\tau$

$i=i_1 = I_0 \sin\omega_1\tau = i_0$

$i_2=0$,

unde $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1C}$, $I_0 = q_0/\sqrt{L_1C}$.

Cele două bobine legate în paralel cu inductanța echivalentă $L= L_1L_2/(L_1+ L_2)$, astfel încît se poate scrie:

$q=q_m \cos(\omega t +\varphi_0)$

$i= \omega q_m \sin(\omega t +\varphi_0)$, cu $\omega=\sqrt{(L_1+ L_2)/L_1L_2C}$

Utilizînd condițiile inițiale se obține sistemul de ecuații :

$q_m \cos\varphi_0 = q_0 \cos\omega_1\tau$

$\omega q_m \sin\varphi_0= \omega_1 q_0\sin\omega_1\tau$

de unde se găsește:

$$q_m = q_0 \sqrt{\cos^2\omega_1\tau + \omega_1^2\sin^2\omega_1\tau/\omega_2^2}=$$

$$= q_0 \sqrt{\cos^2\tau/\sqrt{L_1C}+L_2/(L_1+ L_2)^{\sin^2\tau}/\sqrt{L_1C}}$$

$$tg\varphi_0= \sqrt{L_2/(L_1+ L_2)}tg\tau/\sqrt{L_1C}$$

b) intensitatea curentului în ramura condensatorului este : $i=I_m\sin(\omega t +\varphi_0)$, cu $I_m= \omega q_m$

Pentru cele două bobine, ecuația tensiunilor se scrie:

$L_1(di_1/dt) =L_2(di_2/dt)$, sau $d\phi_1/dt =d\phi_2/dt$

Deoarece fluxurile magnetice au viteze de variație egale ele vor diferi printr-o constantă, egală cu fluxul inițial (la momentul τ) prin prima bobină: $\phi_1-\phi_{01}= \phi_2$, sau $L_1(i_1- i_0)= L_2i_2$

A doua relație între i_1 și i_2 rezultă din prima teoremă a lui Kirchhoff:

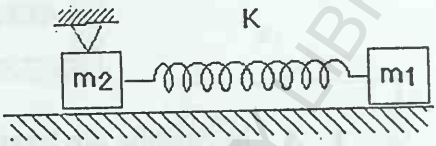
$i=i_1 + i_2$, iar din rezolvarea sistemului avem:

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$i_1 = L_2 i/(L_1+L_2) + L_1 i_0/(L_1+L_2)$,

$i_2 = L_1(i - i_0)/(L_1+L_2)$

Observație: Curentul din ramura principală (condensator) se ramifică în cele două bobine în părți invers proporționale cu inductanțele, peste care se suprapune un curent constant, de intensitate $L_1 i_0/(L_1+L_2)$, care circulă în ochiul format de cele două bobine.



c) Un sistem de două corpuri cu masele m_1 și m_2, legate printr-un resort, oscilează cu m_2 blocat. În momentul τ corpul al doilea este lăsat liber. În momentul eliberării corpului al doilea, viteza primului corp este v_0, iar alungirea resortului $x_0' = x_0 \cos\omega_1\tau$ Mișcarea se va descompune în mișcare de ansamblu (mișcarea centrului de masă) și mișcare relativă (mișcarea unei particule fictive cu masa egală cu masa redusă a sistemului: $m_r = m_1 m_2/(m_1+m_2)$. Din conservarea impulsului: $(m_1+m_2)v_{cM} = m_1 v_0$ se găsește viteza mișcării de ansamblu $v_{cM} = m_1 v_0/(m_1+m_2)$

Mișcarea relativă este o oscilație descrisă de ecuațiile:

$x = x_m \cos(\omega t+\varphi_0)$

$v_r = \omega x_m \sin(\omega t+\varphi_0)$, cu $\omega = \sqrt{k/m_r}$

Amplitudinea acestei mișcări poate fi obținută energetic:

$kx'^2_0/2 + m_r v_0^2/2 = kx_m^2/2$

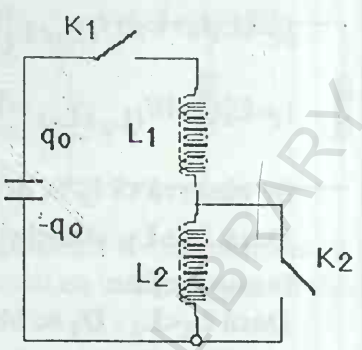
Avînd viteza relativă $v_r = v_1 - v_2$ și viteza centrului de masă $v_{cM} = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1+m_2)$, se pot găsi v_1 și v_2

În cadrul analogiei pot fi stabilite următoarele corespondențe:

circuit electric	sistem mecanic
sarcina electrică q	alungirea resortului x
capacitate C	1/k, k = constanta de elasticitate
intensități $i_1, -i_2$ (semnul este convențional)	viteze, v_1, v_2
inductanțe L_1, L_2	mase m_1, m_2
inductanța echivalentă $L = L_1 L_2/(L_1+L_2)$	masa redusă $m_r = m_1 m_2/(m_1+m_2)$
flux magnetic	impuls

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

16. În circuitul din figură inițial întrerupătorul k_1 este deschis iar k_2 închis La un interval de timp τ după închiderea primului se deschide cel de-al doilea. Să se găsească:



a) valoarea maximă a sarcinii condensatorului și a intensității;

b) energia disipată;

c) o analogie mecanică.

REZOLVARE:

La deschiderea întrerupătorului k_2 condensatorul este încărcat cu $q=q_0\cos\omega_1\tau$, iar intensitatea are valoarea

$$i_1=\omega_1 q_0 \sin\omega_1\tau \text{ , cu } \omega_1=1/\sqrt{L_1C}.$$

Din legea a doua a lui Kirchhoff se obține ecuația tensiunilor:

$$u_c=e_1+e_2, \text{ cu } u_c=q/C,\ e_1=-L_1(di_1/dt),\ e_2=-L_2(di_2/dt)$$

Curenții prin bobine vor varia rapid pentru a ajunge la aceeași intensitate, astfel încît tensiunile autoinduse vor fi mult mai mari decît tensiunea la bornele condensatorului, care poate fi neglijată:

$$L_1(di_1/dt)+L_2(di_2/dt)=0 \text{ sau } d\phi_1/dt+d\phi_2/dt=0$$

Ultima ecuație se poate scrie:

$d(\phi_1+\phi_2)/dt=0$, **ceea ce arată că suma fluxurilor magnetice (fluxul total) se conservă. Ținînd seama de condițiile inițiale se poate scrie:**

$$L_1i_1=(L_1+L_2)i, \text{ de unde } i=L_1i_1/(L_1+L_2)$$

Vor avea loc oscilații, descrise de ecuațiile:

$$q=q_m\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$i=\omega q_m\sin(\omega t+\varphi_0),\ \omega=1/\sqrt{(L_1+L_2)C}$$

Condițiile inițiale conduc la sistemul:

BCU IAȘI CONTRACT UNIVERSITY LIBRARY

$$q_m \cos\varphi_0 = q_0 \cos\omega_1\tau$$

$$\omega q_m \sin\varphi_0 = L_1/(L_1+L_2)\,\omega_1 q_0 \sin\omega_1\tau$$

din care rezultă:

$$q_m = q_0\sqrt{\cos^2\omega_1\tau + L_1/(L_1+L_2)\sin^2\omega_1\tau}\ ,$$

$$I_m = \omega q_m = q_0/\sqrt{(L_1+L_2)C}\sqrt{\cos^2\omega_1\tau + L_1/(L_1+L_2)\sin^2\omega_1\tau}$$

b) energia se disipă prin scînteile care se produc între contactele întrerupătorului k_2 datorită tensiunii foarte mari, astfel încît o parte din energia cîmpului magnetic se pierde:

$$Q = W_{mi} - W_{mf} = L_1 i_1^2/2 - (L_1+L_2)i^2/2,$$

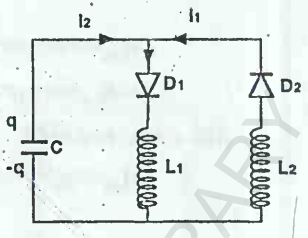
de unde se obține

$$Q = L_1L_2i_1^2/2(L_1+L_2) = L_1L_2\omega_1^2q_0^2\sin^2\omega_1\tau/2(L_1+L_2)$$

c) corpul de masă m_1, care oscilează legat de un resort, ciocnește plastic un corp de masă m_2 aflat în repaus (sau corpul 2 cade vertical și se fixează de corpul 1 care oscilează orizontal).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

17 Determinați perioada oscilațiilor electromagnetice ale circuitului din figură.



Se cunosc inductanțele L_1, L_2, capacitatea C și sarcina q_0 cu care a fost încărcat condensatorul înainte de conectare în circuit.

Care este amplitudinea de oscilație a sarcinii?

Toate elementele de circuit sînt ideale.

REZOLVARE:

După conectare, dioda D_2 rămîne blocată pînă cînd sarcina condensatorului devine 0 iar intensitatea maximă :

$$i = i_1 = I_0 = q_0 / \sqrt{(L_1 C)} \cdot$$

În momentul în care i_1 începe să scadă se deschide D_2. Cînd ambele diode conduc, bobinele legate în paralel au inductanța echivalentă:

$$L = L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$$, **deci perioada oscilațiilor va fi :**

$$T = 2\pi \sqrt{L_1 L_2 C / (L_1 + L_2)} \cdot$$

Intensitsitatea curentului prin condensator va avea expresia : $i = I_0 \cos \omega t$.

Din legea autoinducției :

$$L_1 di_1/dt = - L_2 di_2/dt$$ **rezultă:**

$d(L_1 i_1)/dt = -d(L_2 i_2)/dt$, **sau** $d/dt(L_1 i_1 + L_2 i_2) = 0$, **adică**

$$L_1 i_1 + L_2 i_2 = \text{const.}$$

Cum, în momentul deschiderii celei de-a doua diode $i_1 = I_0$ iar $i_2 = 0$, se poate scrie :

$$L_1 i_1 + L_2 i_2 = L_1 I_0 \cdot \qquad (1)$$

A doua relație între intensități este dată de prima teoremă a lui Kirchhoff : $i = i_1 - i_2$ (2)

Din ecuațiile (1) și (2) se obțin expresiile intensităților:

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$i_1=(L_1I_0+L_2i)/(L_1+L_2) = I_0(L_1+L_2\cos \omega t)/(L_1+L_2)$

$i_2=L_1(i_0-i)/(L_1+L_2) = I_0L_1(1-\cos\omega t)/(L_1+L_2)$

Se observă că $i_2 \geq 0$, deci D_2 rămîne deschisă.

Dacă $L_1 \geq L_2$, atunci şi $i_1 \geq 0$, prin urmare ambele diode vor rămîne în conducţie.

Dacă $L_1 < L_2$, D_1 se blochează cînd $i_1 = 0$. Continuă descărcarea prin D_2. Cînd $i_2 = 0$, $q = q_0$, polaritatea fiind inversată.

Procesul se reia cu descărcarea condensatorului prin L_2, D_1 deschisîndu-se cînd intensitatea va fi maximă:

$$i_2 = -i = I_0' = q_0/\sqrt{L_2C}$$

Expresiile intensităţilor vor fi:

$$i = -I_0' \cos\omega t$$

$$i_1 = I_0' L_2(1-\cos\omega t)/(L_1+L_2)$$

$$i_2 = I_0' (L_2+L_1\cos\omega t)/(L_1+L_2)$$

În concluzie, se ajunge la situaţia în cale ambele diode rămîn deschise, osciilaţiile se fac cu perioada:

$$T = 2\pi\sqrt{L_1L_2C/(L_1+L_2)},$$

intensitatea curentului prin ramura condensatorului are amplitudinea

$$I_0 = q_0/\sqrt{L_1C} \quad \text{sau} \quad I_0' = q_0/\sqrt{L_2C}$$

după cum L_1 este mai mare sau mai micdecît L_2.

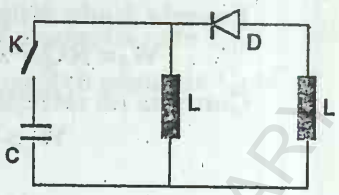
Valoarea maximă a sarcinii I_{max}/ω este:

$$q_{max} = q_0\sqrt{L_2/(L_1+L_2)} \quad \text{dacă } L_1 > L_2$$

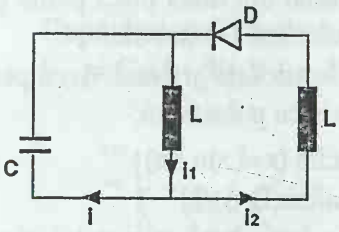
$$q_{max} = q_0\sqrt{L_1/(L_1+L_2)} \quad \text{dacă } L_1 < L_2$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

18 Fiind dat circuitul din figura alăturată, studiați dependența de timp a intensităților curenților care circulă prin cele două bobine ideale de inductanță L și a sarcinilor electrice de pe armăturile condensatorului de capacitate C după închiderea întrerupătorului K. Se consideră că la momentul inițial condensatorul era încărcat cu sarcina Q_0, și că dioda este ideală.



REZOLVARE:



După închiderea întrerupătorului, condensatorul se descarcă prin prima bobină. Cînd curentul atinge valoarea maximă $Q_0/\sqrt{LC}$, dioda intră în conducție, iar intensitățile vor avea intensitățile vor avea expresiile date de (vezi problema precedentă):

$$i_1 = (Q_0/\sqrt{LC})\times(1 + \cos\omega t)/2$$

$$i_2 = (Q_0/\sqrt{LC})\times(1 - \cos\omega t)/2$$

$$i = i_1 - i_2 = (Q_0/\sqrt{LC})\times \cos\omega t \qquad \text{unde } \omega_0 = \sqrt{2/LC},$$

Sarcina de pe armăturile condensatorului va avea expresia:

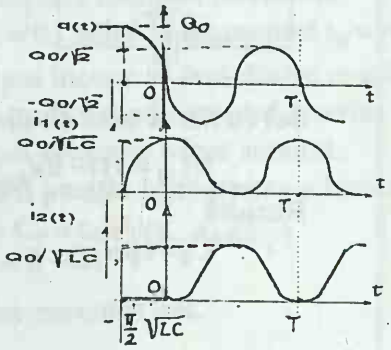
$$q = (I_m/\omega)\cos(\omega_0 t - \pi/2) = -(Q_0/\sqrt{2})\times \sin\omega t,$$

($i = -dq/dt$)

Momentul t=0 a fost considerat aici momentul intrării în conducție a diodei.

Întrerupătorul se închide la momentul $t = -\pi/2 \times \sqrt{LC}$

În continuare sînt redate reprezentările grafice ale mărimilor a căror dependență de timp a fost dedusă mai sus:



BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

19 Într-un circuit oscilant RLC, de rezistență foarte mică se produc oscilații slab amortizate. Pentru întreținerea lor se acționează fie acupra plăcilor condensatorului, variind pulsatoriu distanța d dintre armături (fig a), fie asupra lungimii l a bobinei (fig b)

Se presupune că amplitudinea oscilațiilor mecanice este suficient de mică pentru a nu influența sesizabil perioada oscilațiilor electromagnetice.

a) Descrieți energetic procesul de întreținere și calculați care trebuie să fie raportul dintre amplitudinea pulsurilor d , respectiv l.
b) Această întrebare pentru pulsurile sinusoidale din fig c

REZOLVARE

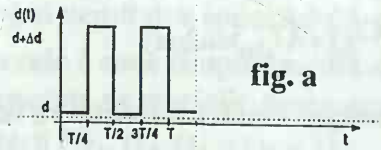


fig. a

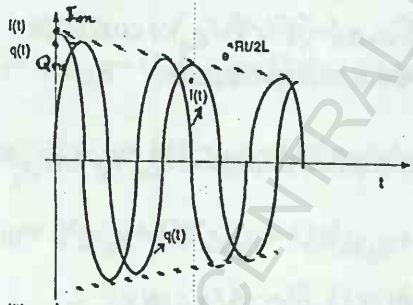


fig. b

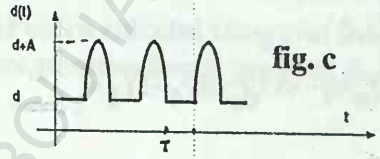


fig. c

a) De două ori într-o perioadă, în momentul cînd sarcina condensatorului este maximă, plăcile lui sînt indepărtate brusc cu Δd=A , iar în momentul cînd sarcina devine nulă ele sînt aduse rapid la distanța inițială d . Energia furnizată în timp de jumătate de perioadă prin creșterea distanței va fi:

$$\Delta W_C = Q_m^2/2\varepsilon_0 S/d+A - Q_m^2/2\varepsilon_0 S/d = (Q_m^2/2c)(A/d)$$

Energia disipată sub formă de căldură în rezistență R:

$$\Delta W_J = \int_0^{T/2} Ri^2 dt \cong \int_0^{T/2} RI^2_m \sin^2\omega t dt =$$

$$= RI^2_m T/4 = RQm^2\omega^2/4 \cdot 2\pi/\omega =$$

$$= RQm^2\pi/2\sqrt{LC}$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

unde am neglijat scăderea amplitudinii intensității în timpul unei perioade.

Dacă $\Delta W_C > \Delta W_J$ oscilațiile sînt întreținute, ceea ce revine la $A/d \geq \pi R\sqrt{C/L}$

Cînd variază lungimea bobinei de la l , la l+Δl, inductanța variază de la L, la L–ΔL unde $\Delta L = \mu N^2 S(1/l - 1/l+\Delta l) \cong L\,\Delta l/l$

Energia înmagazinată în bobină în T/2 va fi:

$$\Delta W_L = LI_m^2/2 - (L - \Delta L)I_m^2/2 = (L\Delta l/2l)I_m^2$$

Energia Joule dispersată în rezistența electrică în același timp:

$$\Delta W_J = RI_m^2 T/T$$

Dacă $\Delta W_L \geq \Delta W_J$, adică $\Delta l/l \geq R\pi\sqrt{C/L}$ oscilațiile sînt întreținute.

c) Pentru un sfert de perioadă capacitatea variază după legea:

$$C_{(t)} = \varepsilon_0 S/(d_0 + A\sin 2\omega t) = C/(1 + A/d_o \sin 2\omega t)$$

Variația elementară a energiei condensatorului va fi:

$$dW_C = |q^2/2C_{(t)} - q^2/2C_{(t+dt)}| = (q^2/C)(A/d_0)\omega \cos 2\omega t dt$$

iar energia furnizată în timp de o semiperioadă.

$$W_C = \int_{T/4}^{T/2} (Q_m^2/C)(A/d_0)\omega \cos^2\omega t \cos 2\omega t dt = Q_m^2/C \cdot A/d_0 \cdot \omega/2 \cdot$$

$$\cdot \int_{T/4}^{T/2} (1 + \cos 2\omega t)\cos 2\omega t dt = Q_m^2/C \cdot A/d_0 \cdot \omega/2 \cdot$$

$$\cdot [\int_{T/4}^{T/2} \cos 2\omega t dt + \int_{T/4}^{T/2} \cos^2 2\omega t dt] = Q_m^2/C \cdot A/d_0 \cdot \omega/2 \cdot$$

$$\cdot [\int_{T/4}^{T/2} (1 + \cos 4\omega t)/2 dt]_{T/4}^{T/2} = Q_m^2/C \cdot A/d_0 \cdot \omega/4 \cdot T/4 =$$

$$= Q_m^2/C \cdot A/d_0 \cdot \pi/8$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Energia Joule disipată în același timp

$$W_J = RQ_m^2\pi/2\sqrt{LC}$$

Condiția de întreținere

$W_C > W_J$ **ne conduce la**

$$Q_m^2/C \cdot A/d_0 \cdot \pi/8 \geq RQ_m^2\pi/2\sqrt{LC} \Rightarrow$$

$$A/d_0 \geq 4R\sqrt{C/L}$$

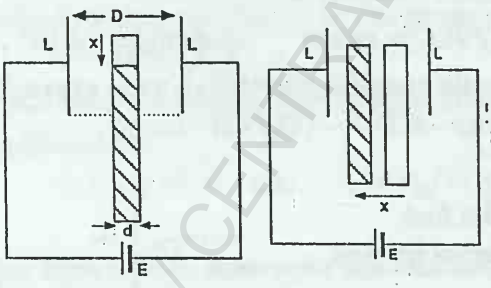
20 Un condensator este format din două plăci plane paralele de lungime L, arie S și distanță D între ele.

Între plăci se află o lamă dielectrică de grosime d, cu permitivitatea ε_r, pusă în mișcare oscilatorie cu pulsație ω:

a) pe direcție paralelă cu plăcile (x=Lsin ωt)

b) perpendicular pe ele [x= sinωt(D-d)/2]

Stabiliți dependența de timp a intensității curentului din circuitul condensatorului în cazurile (a) și (b), dacă el este conectat la o sursă de tensiune E iar placa dielectrică este neutră electric.



REZOLVARE

a) Fie C_0 capacitatea condensatorului cu lama dielectrică în poziție de echilibru. El este echivalent cu trei condensatori în serie, doi cu aer și unul cu dielectric de permitivitate ε_r. Capacitate lor:

$$1/C_0 = (D-d)/\varepsilon_0 S + d/\varepsilon_0\varepsilon_r S = 1/\varepsilon_0 S(D - d + d/\varepsilon_r)$$

Rezultă

$$C_0 = \varepsilon_0 S/(D - d + d/\varepsilon_r)$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În mișcare, la momentul t, cînd elongația este $x_{(t)}$, capacitatea echivalentă este aceea a grupării paralele C_1+C_2 unde $C_1 = \varepsilon_0 S|x|/DL$

iar:

$$1/C_2 = 2(D-d)/2/\varepsilon_0 S(L-|x|)/L + d/\varepsilon_0\varepsilon_r S(L-|x|)/L$$

de unde:

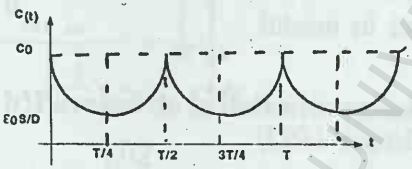
$$C_2 = \varepsilon_0 S(L-|x|)/L(D - d + d/\varepsilon_r)$$

Așa încît:

$$C_{(x)} = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 S/L[|x|/D + (L-|x|)/(D - d + d/\varepsilon_r)] =$$
$$= C_0[(1 - d/LD\ (\varepsilon_r - 1)/\varepsilon_r |x|]$$

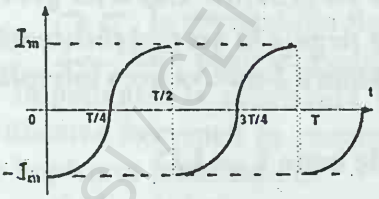
Capacitatea C depinde de timp după legea:

$C_{(t)} = C_0(1 - d/D \cdot (\varepsilon_r - 1)/\varepsilon_r \cdot |\sin\omega t|)$ (v. graficul)



Sarcina de pe armături va fi și ea funcție sinusoidală de timp $q_{(t)} = C_{(t)}\ E = C_0\ E\ [1 - d/D\ (\varepsilon_r - 1)/\varepsilon_r \cdot |\sin\omega t|]$ și de asemenea intensitatea curentului din circuit:

$i_{(t)} = -\omega C_0\ E\ (\varepsilon_r - 1)/\varepsilon_r (d/D) \cos\omega t$ cu specificarea că apar discontinuități în momentul cînd lama este complet introdusă ($x = 0$, adică la momentul $t_n = nT/2$) apoi începe să iasă dintre armături (v. grafic) cînd curentul, maxim fiind, schimbă brusc semnul.



b) În acest caz, oricare ar fi poziția instantanee a lamei, capacitatea nu se modifică $C_{(t)} = C_0 = \varepsilon_0 S/(D - d + d/\varepsilon_r)$

Sarcina $q_{(t)} = C_0 E$ = constant, iar curentul nul.

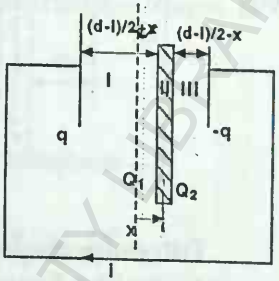
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

21 În mijlocul distanței d dintre armăturile unui condensator plan se află o placă având suprafața S egală cu a armăturilor și grosimea l, încărcată cu sarcina Q. Ce intensitate va avea curentul prin firul care leagă armăturile cînd placa se mișcă perpendicular pe acestea după legea x=Asinωt, dacă:

a) placa este conductoare

b) placa este dielectrică (ε_r)și este uniform încărcată pe ambele fețe.

Se neglijează rezistența firului.



REZOLVARE

Cîmpul electric al unui plan uniform încărcat cu sarcina avînd densitatea superficială σ are intensitatea $E = \sigma/2\varepsilon_0$

În cele 3 zone cîmpul rezultă din suprapunerea cîmpurilor generate de sarcinile de pe armăturile condesatorului(q,-q) și ale plăcii (Q_1, Q_2, $Q_1 + Q_2 = Q$)

$$E_I = q/2\varepsilon_0 S - Q_2/2\varepsilon_0 S - Q_1/2\varepsilon_0 S + q/2\varepsilon_0 S = q/S\varepsilon_0 - Q/2\varepsilon_0 S$$

$$E_{II} = q/2\varepsilon_0 S + Q_2/2\varepsilon_0 S - Q_1/2\varepsilon_0 S + q/2\varepsilon_0 S = q/S\varepsilon_0 + (Q_2 - Q_1)/2\varepsilon_0 S = 0$$

$$E_{III} = q/2\varepsilon_0 S + Q_2/2\varepsilon_0 S + Q_1/2\varepsilon_0 S + q/2\varepsilon_0 S = q/\varepsilon_0 S + Q/2\varepsilon_0 S$$

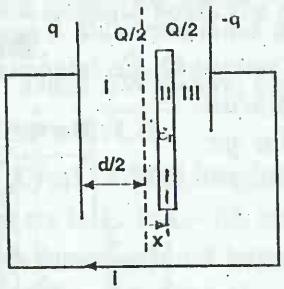
Scriind diferența de potențial dintre armături:

$$U = E_I[(d-l)/2 + x] + E_{II}[(d-l)/2 - x] = 0$$

se va obține în urma unor calcule simple $q = Q\,x/_{(d-l)}$, iar intensitatea va fi $i = dq/dt = Qv/_{(d-l)} = [Q\omega A/_{(d-l)}]\cos\omega t$

b)Pentru calculul cîmpului folosim vectorul inducție electrică, care,pentru cîmpul generat de un plan uniform,are modulul $D = \sigma/2$.

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



$D_I = q/2S - Q/2S + q/2S = q/S - Q/2S$

$D_{II} = q/2S + Q/4S - Q/4S + q/2S = q/S$

$D_{III} = q/2S + Q/2S + q/2S = q/S + Q/2S$

Intensităţile cîmpurilor în cele trei zone vor fi :

$$E_I = 1/\varepsilon_0 S\,(q - Q/2)$$

$$E_{II} = q/\varepsilon_0 \varepsilon_r S$$

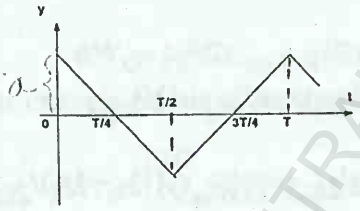
$$E_{III} = 1/\varepsilon_0 S\,(q + Q/2)$$

Diferenţa de potenţial între armături va fi

$U = E_I[(d-l)/2 + x] + E_{II} l + E_{III}[(d-l)/2 - x] = 0$, **de unde se va obţine**

$$q = Qx/[d - l(1 - 1/\varepsilon_r)], \quad v = \{Q\omega A/[d - l(1 - 1/\varepsilon_r)]\}\cos\omega t$$

22 Să se scrie semnalul triunghiular simplu ca funcţie de timp. Dacă el ar reprezenta un semnal de curent, calculaţi valoarea intensităţii sale efective.



REZOLVARE

a) Pe intervalul $t \in [0, T/2]$ semnalul e liniar: $y_{(t)} = a - bt$ dreapta trece prin punctele $t=0$ şi $t=T/2$ deci $y=a$ $y=-a$

$b=4a/T$ deci $y_{(t)} = a(1 - 4t/T)$ pentru $t \in [0, T/2]$

Pe intervalul $t \in [T/2, T]$ punem $y_{(t)} = A + B(t - T/2)$ dreapta care trece prin punctul $t = T/2$

$y = -a$ rezultă $A = -a$

şi prin punctul $t = T$

$y = a$ de unde rezultă $B = 4a/T$

astfel că $y_{(t)} = -a(3 - 4t/T)$ pentru $t \in [T/2, T]$

În concluzie semnalul va fi descris de:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$y_{(t)}=(-1)^{K+1}\, a[2K-1-4t/T]$ unde K este indicele semiperioadei căreia îi aparține t (K = 1, 2, 3, ...)

b) Energia Joule disipată de acest curent ~ în timpul unei semiperioade:

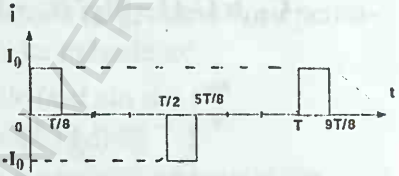
$$W_{J\sim}=\int_0^{T/2} Ri^2_{(t)}dt = Ra^2\int_0^{T/2}(1-4t/T)^2dt = Ra^2T/6$$

Energia Joule furnizată de curent continuu de intensitate I_{ef}, prin aceași rezistență, tot în intervalul T/2:

$$W_J = RI^2_{ef}\, T/2$$

Egalîndu-le, găsim $I_{ef} = a/\sqrt{3}$.

23 Determinați mărimea efectivă a unui curent alternativ care variază în modul următor:



(Tabăra de fizică Brașov 1993)

REZOLVARE

Căldura disipată în timpul de o perioadă pe consumatorul de rezistență R este :

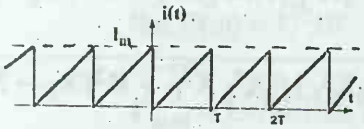
$$W_J = RI^2_0(T/8 - 0) + RI^2_0(5T/8 - T/2) = RI^2_0T/4$$

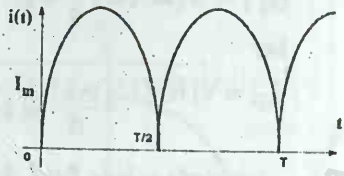
Un curent continuu,care ar degaja în aceeași rezistență, în același interval de timp, aceeași căldură Joule,va avea intensitatea I_{ef}, așa încît:

$RI^2_{ef}T = RI^2_0T/4$, de unde $I_{ef} = I_0/2$.

24 Găsiți valorile efective ale intensității semnalelor:
a)dinți de fierăstrău;
b)sinusoidă redresată.
reprezentate în figura alăturată:

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY





REZOLVARE

a) Din definiția intensității efective:

$$R\int_0^T i^2_{(t)}dt = RI_{ef}{}^2T$$

unde $i_{(t)}=I_m/T\ t$ pentru $t \in [0,T]$ și de aici:

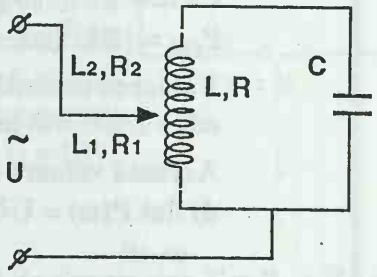
$$I_m{}^2/T2\int_0^T t^2dt = T\ I^2_{ef}\ \text{ de unde } I^2_{ef} = I^2_m/3 \text{ iar } I_{ef} = I_m/\sqrt{3}$$

b) Pornind de la definiția valorii eficace:

$$2RI_m{}^2\int_0^{T/2}|\sin\omega t|^2dt = RI_{ef}{}^2T$$

găsim $I_{ef}=I_m/\sqrt{2}$ ca și la curentul sinusoidal alternativ (neredresat).

25. În circuitul din figură, care permite modificarea impedanței la rezonanță fără modificarea frecvenței de rezonanță, prin împărțirea inductanței L:



a) să se deducă expresia impedanței în funcție de raportul $p = L_1/L$, pentru $R << L\omega$

b) să se determine poziția prizei pentru acordarea circuitului pe armonica a n-a ($n = 2$) a frecvenței fundamentale, armonică pe care

BCU "LUCIAN BLAGA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

circuitul trebuie să o suprime (filtru).

Se va considera cazul circuitului cu impedanță mutuală nulă între cele două secțiuni ale bobinei.

(Tabăra de fizică – Brașov 1993)

REZOLVARE:

a) Circuitul are două ramuri cu impedanțele:

$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = p(R + jX_L)$

$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} - jX_C = (1-p)(R + jX_L) - jX_C$,

dispuse în paralel, astfel încît impedanța echivalentă se poate scrie:

$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1\underline{Z}_2/(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = p(R + jX_L)[(1-p)(R + jX_L) - jX_C)] / [(R + j(X_L - X_C)]$

La rezonanță $X_L = X_C = Z_0 = \sqrt{L/C}$. Expresia impedanței devine:

$\underline{Z}e = p(R + jZ_0)[(1-p)(R - jZ_0) - jZ_0] / R$,

sau neglijînd R la numărător:

$\underline{Z}e = pjZ_0(-jpZ_0)/R = p^2L/RC$

b) Pentru armonica a n-a $\omega = n\omega_0$, deci

$X_L = nZ_0$, $X_C = Z_0/n$.

Neglijînd rezistența se poate scrie:

$1/\underline{Z}en = 1/jpnZ_0 + 1/j[(1-p)Z_0n - Z_0/n]$

$\underline{Z}en = 0$ dacă $[(1-p)Z_0n - Z_0/n] = 0$,

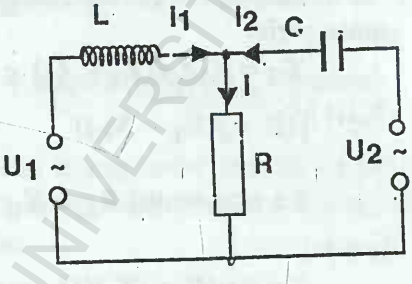
de unde rezultă

$p = (n^2 - 1)/n^2$.

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

26 Dîndu-se inductanța L a bobinei ideale, rezistența R și capacitatea C a condensatorului și cunoscînd valorile efective U_1 și U_2 ale celor două tensiuni alternative în fază să se deducă: a) curenții prin ramuri: $i_{1(t)}$, $i_{2(t)}$, $i_{(t)}$; b) expresia puterii medii disipate pe rezistorul R; c) În cazul $U_1 = U_2$ să se determine frecvența pentru care puterea disipată e minimă și valoarea acesteia; d) să se reprezinte grafic $P_{(\omega)}$; e) să se deducă $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, unde $\omega_{1,2}$ sînt frecvențele pentru care $P = 1/2P_{max}$ și să se interpreteze raportul $\omega_0/\Delta\omega$, unde ω_0 este frecvența de rezonanță.

REZOLVARE:



a) Lucrînd în complex, legile lui Kirchhoff devin:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{X}_L + \underline{I}R$$
$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{X}_C + \underline{I}R$$
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

adică:

$$U_1 = jX_L\underline{I}_1 + \underline{I}R$$
$$U_2 = -jX_C\underline{I}_2 + \underline{I}R$$
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

de unde

$$\underline{I} = (U_1X_C - U_2X_L)/[R(X_C - X_L) + jX_LX_C];$$
$$\underline{I}_1 = (U_1 - \underline{I}R)/jX_L = [R(U_2 - U_1) + jU_1X_C]/[-X_LX_C + jR(X_C - X_L)],$$

iar

$$\underline{I}_2 = (U_2 - \underline{I}R)/jX_C = [R(U_2 - U_1) + jU_2X_L]/[X_LX_C - jR(X_C - X_L)],$$

Modulele intensităților vor fi:

$$|\underline{I}| = (U_1X_C - U_2X_L)/\sqrt{[R^2(X_C - X_L)^2 + X^2{}_LX^2{}_C]}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$|\underline{I}_1| = \sqrt{[R^2(U_2 - U_1)^2 + U^2_1X^2_C]/[X^2_LX^2_C + R^2(X_C - X_L)^2]}$,

iar

$|\underline{I}_2| = \sqrt{[R^2(U_2 - U_1)^2 + U^2_2X^2_L]/[X^2_LX^2_C + R^2(X_C - X_L)^2]}$,

iar defazajele față de tensiuni:

$tg\,\varphi = I_m\underline{I}/Re\,\underline{I} = X_LX_C/(X_L - X_C) = (L/R_C)/(\omega L - 1/\omega C)$

$tg\,\varphi_1 = I_m\underline{I}_1/Re\,\underline{I}_1 = [U_1X^2_CX_L + R^2(U_2 - U_1)(X_C - X_L)]/$
$/(RX_LX_C(U_2 - U_1) - RU_1X_C(X_C - X_L)] = (U_1X^2_CX_L + R^2(U_2 -$
$-U_1)(X_C - X_L)/[RX_C(X_LU_2 - U_1X_C)]$

$tg\varphi_2 = I_m\underline{I}_2/Re\,\underline{I}_2 = [(R(X_C - X_L)(U_2 - U_1)R +$
$U_2X^2_LX_C)/[(U_2 - U_1)RX_LX_C - U_2RX_L(X_C - X_L)] =$
$= [R^2(U_2 - U_1)(X_C - X_L) + U_2X^2_LX_C]/RX_L(U_2X_L - U_1X_C)$

Astfel încît:

$i_{1(t)} = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1)$

$i_{2(t)} = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2)$

$i_{(t)} = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$

b) $P = RI^2 = R(U_1X_C - U_2X_L)^2/[R^2(X_L - X_C)^2 + X^2_LX^2_C]$

c) $U_1 = U_2$ implică $P = [RU^2(X_C - X_L)^2]/[R^2(X_L - X_C)^2 +$
$+X^2_LX^2_C]$.

Ca funcție de ω puterea are expresia:

$P_{(\omega)} = [RU^2(\omega L - 1/\omega C)^2]/[R^2(\omega L - 1/\omega C)^2 + L^2/C^2]$

Valoarea minimă (0) a puterii se obține pentru:

$\omega L - 1/\omega C = 0$, adică $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

Această valoare corespunde regimului de rezonanță.

d) $\lim P(\omega) = U^2/R$

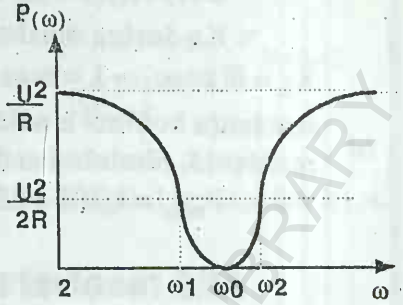
$\omega \to 0$

$\omega > 0$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\lim_{\omega\to\infty} P(\omega) = U^2/R$

$P_{max} = U^2/R$ este atinsă la limită $\omega = 0$ sau $\omega\to\infty$



e) $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

$P(\omega_{1,2}) = U^2/2R =$

$$=[RU^2(\omega_{1,2}L - 1/\omega_{1,2}C)^2]/[R^2(\omega_{1,2}L - 1/\omega_{1,2}C)^2 + L^2/C^2]$$

Din această ecuație deducem

$$\omega_{1,2} = (\sqrt{1 + 4R^2C/L} \pm 1)/2RC$$

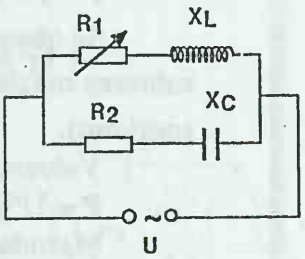
și

$\Delta\omega = 1/RC$ semilărgimea curbei de rezonanță.

Raportul:

$\omega_0/\Delta\omega = \omega_0/(1/RC) = RC/\sqrt{LC} = R\sqrt{C/L}$ reprezintă factorul de calitate al circuitului, Q.

27 Se dă circuitul din figură în care se cunosc R_2, X_L, X_C și valoarea tensiunii efective de alimentare sinusoidală U. Știind că rezistența R_1 e variabilă, se cere să se determine valoarea acestei rezistențe pentru care puterea activă are o valoare extremă și apoi să se calculeze această valoare. Aplicație numerică: $R_2 = 2\Omega$, $X_L = 1\Omega$, $X_C = 4\Omega$ și $U = 10V$



REZOLVARE:

Puterea activă absorbită de circuit este $P = P_1 + P_2$, unde P_1 și P_2 sînt puterile absorbite de ramura inductivă, respectiv capacitivă.

BCU IAȘI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Dacă generatorul este ideal (lipsit de impedanță internă) P_2 nu depinde de R_1:

$$P_2 = U^2\cos\varphi_2/Z_2 = U^2R_2/(R^2_2 + X^2_C)$$

Puterea activă absorbită de ramura inductivă are expresia:

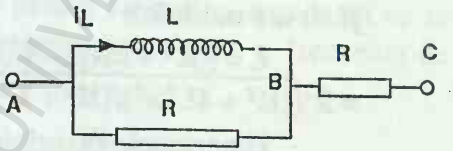
$$P_1 = U^2\cos\varphi_1/Z_1 = U^2R_1/(R^2_1 + X^2_L) = U^2/(R_1 + X^2_L/R_1).$$

Valoarea maximă este atinsă atunci cînd numitorul este minim. Cum $R_1(X^2_L/R_1) = X^2_L$ = constant, $(R_1 + X^2_L/R_1)$ atinge valoarea minimă cînd $R_1 = X^2_L/R_1$, deci pentru $R_1 = X_L$

Prin urmare $P_{1max} = U^2/2X_L$, $P_{max} = U^2/2X_L + U^2R_2/(R^2_2 + X^2_C)$

Numeric: $P_{max} = 60$ W .

28 Un ansamblu paralel alcătuit dintr-o rezistență R și o inductanță L este legat în serie cu o rezistență R. La bornele circuitului se aplică o tensiune care asigură ca prin inductanță să circule un curent variabil $i_L = at + b$, unde a și b sînt constante.



a) Să se determine legile de variație în timp ale curenților prin rezistențe;

b) Să se determine legea de variație în timp a tensiunii u_{AC};

c) Un circuit identic este cuplat la o altă sursă de tensiune, care asigură o diferență de potențial de forma $u_{AC} = U'\sin\omega t$ cu U' constant și frecvență variabilă. Pentru ce frecvență puterea activă absorbită de circuit este maximă și cît este această putere maximă? (Aplicație numerică: R = 20; L = 0,1H; a = 2A/s; b = 1A; U' = 70,7V)

(O.N.F. Sibiu 1992)

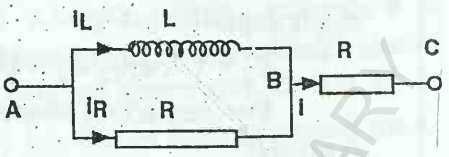
REZOLVARE:

a) Legea a II-a Kirchhoff pentru ochiul L,R ne conduce la $\mathcal{E}_a + Ri_R = 0$, adică $Ldi_L/dt = Ri_R$, de unde $i_R = La/R = 0{,}01$A

BCU "ASE" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(constant).

Aplicînd apoi legea I Kirchhoff pentru nodul B, găsim curentul principal



$i = i_R + i_L = La/R + at + b$, adică curentul prin a doua rezistență:

$i_{(t)} = (2t + 1{,}01)$ A

b) Tensiunea $u_{AC} = u_{AB} + u_{BC} = Ldi_L/dt + i_{(t)}R = 2aL + Rat + bR$

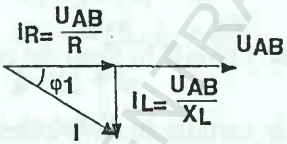
Numeric: $u_{AC(t)} = (2aL + bR) + Rat$ devine:

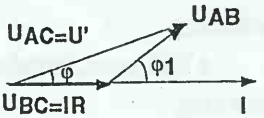
$u_{AC(t)} = 20{,}4 + 40t$

c) Impedanța complexă a circuitului $\underline{Z} = R + RjL\omega/(R + jL\omega)$ are modulul:

$$Z = |(R^2 + 2RjL\omega)/(R + jL\omega)| = R|(R + 2jL\omega)/(R + jL\omega)| = R\sqrt{(R^2 + 4L^2\omega^2)/(R^2 + L^2\omega^2)}$$

Diagramele fazoriale ale circuitului paralel R,L și a întregului circuit ne conduc la expresia factorului de putere $\cos\varphi$:





$$\cos\varphi_1 = U_{AB}/IR = L\omega/\sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)}$$

$$U_{AB} = IRL\omega/\sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)}$$

$$\cos\varphi = (RI + U_{AB}\cos\varphi_1)/U'$$

$$\cos\varphi = R(R^2 + 2L^2\omega^2)/(R^2 + L^2\omega^2)Z$$

Expresia puterii active $P = U'I\cos\varphi = (U'^2/Z^2)[R(R^2 + 2L^2\omega^2)]/(R^2 + L^2\omega^2)$ devine, după înlocuirea lui Z:

$$P(\omega) = (U^2/R)[(R^2 + 2L^2\omega^2)/(R^2 + 4L^2\omega^2)] =$$

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$= (U^2/R)[1 - 2L^2\omega^2/(R^2 + 4L^2\omega^2)]$

Ea devine maximă pentru $\omega = 0$, pulsație pentru care $X_L = 0$, $\cos\varphi_1 = 1 = max$ și la fel $\cos\varphi = 1 = max$. La $\omega = 0$ reactanța bobinei e nulă și aceasta scurtcircuitează prima rezistență, rămînînd activă doar a doua:

$P_{max} = U^2/R = 125W$

Altă rezolvare pt. punctul c):

c) Puterea activă absorbită de circuit este

$P = U^2\cos\varphi/Z$

Impedanța complexă $\underline{Z} = R + jRX_L/(R + jX_L)$ are modulul Z și argumentul φ, deci factorul de putere poate fi scris:

$\cos\varphi = Re\underline{Z}/Z$,

ceea ce permite exprimarea puterii active sub forma :

$P = U^2Re\underline{Z}/Z^2$.

În urma calculelor se obține:

$Z^2 = R^2(R^2 + 4X^2_L)/(R^2 + X^2_L)$,

$Re\underline{Z} = R(R^2 + 2X^2_L)/(R^2 + X^2_L)$,

$P = (U^2/R)(R^2 + 2X^2_L)/(R^2 + 4X^2_L)$.

Se observă că funcția $P(X^2_L)$ scade monoton, deci valoarea maximă se obține pentru $X_L = 0$, deci $\nu = 0$ (în curent continuu).

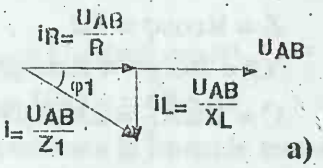
Valoarea maximă a puterii este :

$P = U'^2/2R = 125W$.

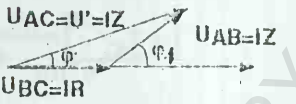
Metoda fazorială:

Circuitul paralel este caracterizat de o impedanță Z_1 și un defazaj φ_1 al tensiunii înaintea intensității, conform diagramei fazoriale a).

BCU IAȘI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY



a)



b)

Impedanța circuitului, din triunghiul tensiunilor b) se exprimă:

$$Z^2 = R^2 + Z^2_1 + 2Z_1 R\cos\varphi_1,$$

iar factorul de putere:

$$\cos\varphi = (R + Z_1\cos\varphi_1)/Z,$$

$$\cos\varphi_1 = Z_1/R$$

astfel încît puterea activă poate fi scrisă:

$$P = (U^2/Z)(R + Z_1\cos\varphi_1)/Z$$

Din triunghiul intensităților b) se obține:

$$\cos\varphi_1 = Z_1/R,\ Z^2_1 = R^2X^2_L/(R^2+X^2_L),$$

$$\text{deci } Z^2 = R^2 + Z^2_1 + 2Z^2_1 = R^2 + 3Z^2_1$$

$$R + Z_1\cos\varphi_1 = R + Z^2_1/R = (R^2 + Z^2_1)/R$$

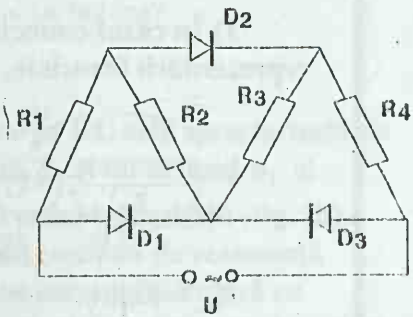
$$\text{iar } P = (U^2/R)[(R^2 + Z^2_1)/(R^2 + 3Z^2_1)]$$

înlocuind Z, găsim :

$$P = (U^2/R)[(R^2 + 2X^2_L)/(R^2 + 4X^2_L)\ .$$

29. În circuitul alăturat diodele sînt ideale, iar rezistențele au aceeași valoare R.

Găsiți puterea absorbită de circuit cînd este aplicată la bornele sale o tensiune alternativă cu valoarea efectivă U.



REZOLVARE:

Pe alternanța pozitivă diodele D_1 și D_2 conduc, iar D_3

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

este blocată. Rețeaua este echivalentă cu gruparea paralel a rezistorilor R_1, R_2 și R_3, înseriată cu R_4. Rezistența echivalentă este:

$Rd = R/3 + R = 4R/3.$

Pe alternanța negativă conduce D_3, D_1 și D_2 fiind blocate. Circuitul este echivalent cu gruparea serie a rezistorilor R_1 și R_2, având rezistența echivalentă $Ri = 2R$.

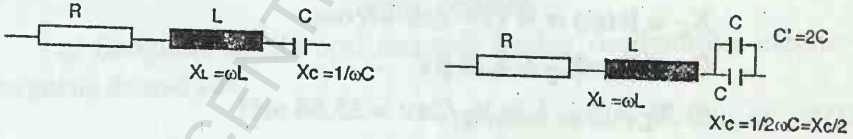
Puterea absorbită de circuit va fi:

$$P = (1/2)(U^2/Rd + U^2/Ri) = 5U^2/8R.$$

30 Un circuit RLC serie are rezistența activă $R = 20\ \Omega$ și impedanța la $\nu = 1000$ Hz, $Z = 25\ \Omega$. Conectînd un condensator identic cu primul în paralel cu acesta, impedanța nu se modifică. Să se calculeze inductanța, capacitatea și frecvența de rezonanță.

REZOLVARE:

Conectînd al doilea condensator, capacitatea se dublează, iar reactanța capacitivă se reduce la jumătate.



Exprimînd impedanța în cele două cazuri, se obține sistemul:

$$\begin{cases} Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2 \\ Z^2 = R^2 + (X_L - X_C/2)^2, \end{cases}$$

de unde se poate scrie:

$X_L - X_C/2 = X_C - X_L = \sqrt{Z^2 - R^2}$.

Se obțin reactanțele și respectiv, inductanța și capacitatea:

$X_L = 3\sqrt{Z^2 - R^2}$;

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$X_C = 4\sqrt{Z^2 - R^2}$;

$L = (3\sqrt{Z^2 - R^2})/2\pi\nu = 7{,}17$ mH;

$C = 1/2\pi\nu\, 4\sqrt{Z^2 - R^2} = 2{,}65\ \mu F$.

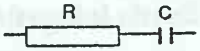
Frecvența de rezonanță a circuitului se obține:

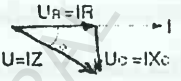
$X_L/X_C = \omega^2 LC = \omega^2/\omega_0^2 = \nu^2/\nu_0^2$,

$\nu_0 = \nu\sqrt{X_C/X_L} = 2\nu\sqrt{3}/3 = 1155$ Hz .

31 Un circuit format dintr-un rezistor cu $R = 10\Omega$ și un condensator, conectat: 1) în serie; 2) în paralel la o tensiune alternativă cu frecvența $\nu = 50$ Hz, are factorul de putere $\cos\varphi = 0{,}8$. Să se calculeze impedanța circuitului, capacitatea condensatorului, precum și valoarea inductanței care conectată: a) în serie; b) în paralel cu circuitul, face ca intensitatea curentului să fie în fază cu tensiunea la borne.

REZOLVARE:





1) Conform diagramei fazoriale:

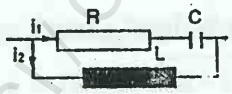
$Z = R/\cos\varphi = 12{,}5\ \Omega$,

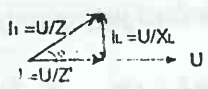
$X_C = R\,tg\varphi = R\sqrt{1 - \cos^2\varphi}/\cos\varphi$,

$C = 1/2\pi\nu X_C = 4{,}25\ \mu F$.

a) $X_L = X_C$, $L = X_L/2\pi\nu = 23{,}88$ mH

b)



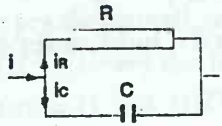


Din triunghiul intensităților se obține:

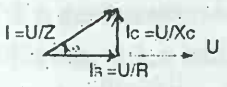
$1/X_L = \sin\varphi/Z$, de unde, înlocuind Z se găsește:

$X_L = R/\sin\varphi\cos\varphi$, $L = 66, 35$ mH .

2)



Din diagrama fazorială se obține:

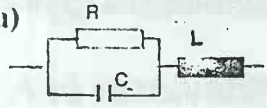


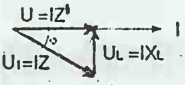
$Z = R\cos\varphi = 8\Omega$,

$X_C = Rctg\varphi = R\cos\varphi/\sqrt{1-\cos^2\varphi}$,

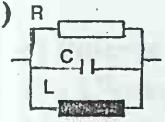
$C = 1/\omega X_C = 238{,}8\ \mu F$.

a)





b)



$X_L = Z\sin\varphi = R\sin\varphi\cos\varphi$,

$L = X_C/\omega = 15{,}28\ mH$.

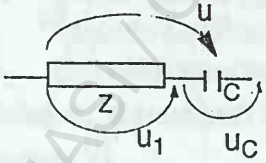
Se obține rezonanța pentru $X_L = X_C$,

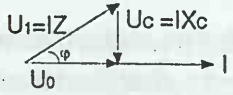
$L = 42{,}46$ mH .

32 Un consumator funcționează la o tensiune alternativă $U_0 = 220V$, cu frecvența $\nu = 50$ Hz, absorbind o putere $P_0 = 500$ W, cu un factor de putere inductiv $\cos\varphi = 0{,}6$. Ce capacitate trebuie conectată pentru ca factorul de putere să devină 1? Cum trebuie conectat condensatorul?

REZOLVARE:

1) În cazul conectării condensatorului în serie, conform reprezentării fazoriale, se poate scrie:





$X_C = Z\sin\varphi$,

Impedanța se obține din expresia puterii:

$P_0 = U_0^2\cos\varphi/Z$, $Z = U_0^2\cos\varphi/P_0$,

deci

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$X_C = U_0^2 \sin\varphi\cos\varphi / P_0$,

$C = 1/\omega X_C = 68{,}5\ \mu F$

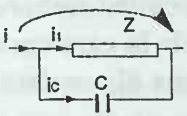
Tensiunea la bornele consumatorului va fi în acest caz

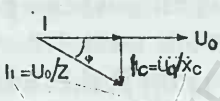
$U_1 = U_0/\cos\varphi = 366{,}7$ V, iar puterea activă:

$P_1 = U_1^2 \cos\varphi / Z = U_0^2 \cos\varphi / Z\cos^2\varphi = P_0/\cos^2\varphi = 1388$ W.

Nu se recomandă deci conectarea în serie a condensatorului, întrucît se depășesc valorile nominale ale tensiunii și puterii.

2) În cazul conectării condensatorului în paralel avem:





$1/X_C = \sin\varphi/Z$,

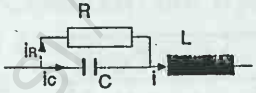
$C = \sin\varphi/\omega Z = 43{,}8\ \mu F$.

Tensiunea la bornele consumatorului rămîne neschimbată U_0, deci va absorbi puterea nominală P_0.

33 Un circuit format dintr-o bobină ideală și un condensator, conectate în serie, are pulsația la rezonanță $\omega_0 = 5.10^5 s^{-1}$. Conectînd un rezistor cu R = 4 kΩ în paralel cu condensatorul, pulsația de rezonanță scade cu f = 60%. Să se determine inductanța L și capacitatea C. La ce pulsație s-ar obține rezonanță conectînd rezistorul în paralel cu bobina?

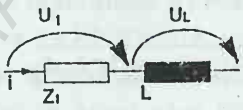
REZOLVARE:

1a)



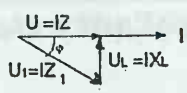
Gruparea RC este caracterizată de o impedanță Z_1 și un defazaj φ_1 al tensiunii în urma intensității (fig. 2b).

1b)

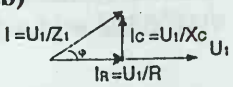


Punînd condiția de rezonanță (intensitatea curentului în fază cu tensiunea), se obține diagrama fazorială din fig. 2a.

2a)



2b)



BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Condiția de rezonanță este deci $X_L = Z_1 \sin\varphi_1$, unde $\sin\varphi_1 = Z_1/X_C$, adică $X_L X_C = Z_1^2$, sau, prin răsturnare: $1/X_L X_C = 1/Z_1^2$, cu $1/Z_1^2 = 1/R^2 + 1/X_C^2$.

Înlocuind $X_L = \omega L = \omega/\omega_0^2 C$, $X_C = 1/\omega C$, $\omega = \omega_0(1 - f)$, după calcule simple, se obține:

$C = 1/\omega_0 R\sqrt{1-(1-f)^2} = 545{,}5$ pF ,

$L = R\sqrt{1-(1-f)^2}/\omega_0 = 73{,}3$ mH .

Condiția de rezonanță în cazul conectării rezistorului în paralel cu bobina:

$1/X_L X_C = 1/R^2 + 1/X_L^2$

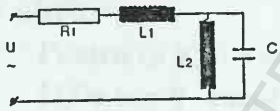
se obține permutînd X_L și X_C în ecuațiile precedente.

Înlocuind $X_L = \omega L$ și $X_C = 1/\omega C$, ecuația devine

$C/L = 1/R^2 + 1/\omega^2 L^2$,

de unde găsim $\omega = \omega_0/(1 - f) = 1{,}25.10^6\ s^{-1}$.

34 a) Determinați impedanță echivalentă a circuitului următor, precum și curenții din fiecare ramură, în funcție de elementele circuitului L_1, L_2, R_1, C și pulsația ω a tensiunii de alimentare.



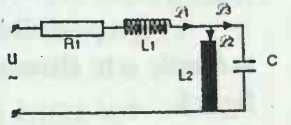
b) Determinați frecvența oscilațiilor libere ale circuitului oscilant corespunzător.

c) Imaginați oscilatorul mecanic analog oscilatorului electromagnetic de mai sus.

(Tabăra de fizică – Brașov 1993)

REZOLVARE:

Lucrînd în complexul simplificat avem $\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + [\underline{Z}_2\underline{Z}_3/(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)]$



unde $\underline{Z}_1 = R_1 + i\omega L_1$

BCU CLUJ CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$\underline{Z}_2 = i\omega L_2$

$\underline{Z}_3 = -i/\omega C$

De aici $\underline{Z}_e = R_1 + i(L_1\omega - L_2/C(L_2\omega - 1/\omega C))$

$Z_e = \sqrt{R^2_1 + [L_1\omega - L_2/C(L_2\omega - 1/\omega C)]^2}$

Curentul principal $\underline{I}_1 = U/\underline{Z}_1$, cu valoarea

$I_1 = U/\sqrt{R^2_1 + [L_1\omega - L_2/C(L_2\omega - 1/\omega C)]^2}$

Curenții prin derivații satisfac relațiile:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

$\underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{I}_3 \underline{Z}_3$

De aici $\underline{I}_2 = \underline{I}_3 \underline{Z}_3/\underline{Z}_2$ și deic $\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \underline{Z}_2/(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$,

iar $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \underline{Z}_3/(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$

Rezultă

$I_2 = U/\omega C\ (\omega L_2 - 1/\omega C)\sqrt{R_1^2 + [L_1\omega - L_2/C(L_2\omega - 1/\omega C)]^2}$

și

$I_3 = U\omega L_2/(\omega L_2 - 1/\omega C)\sqrt{R_1^2 + [L_1\omega - L_2/C(L_2\omega - 1/\omega C)]^2}$

b) frecvența oscilațiilor proprii coincide cu frecvența de rezonanță, ce satisface:

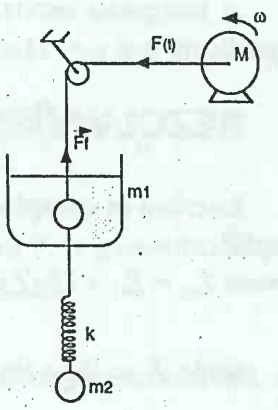
$L_1\omega_0 - L_2/C(\omega_0 L_2 - 1/\omega C) = 0$

Găsim:

$\omega^2 = (L_1 + L_2)/CL_1L_2$

adică pulsația proprie a circuitului oscilant cu bobina echivalentă $L_1L_2/(L_1 + L_2)$, rezultată prin legarea în paralel a lui L_1 și L_2.

c) Un posibil analog mecanic este sistemul oscilant din figură :



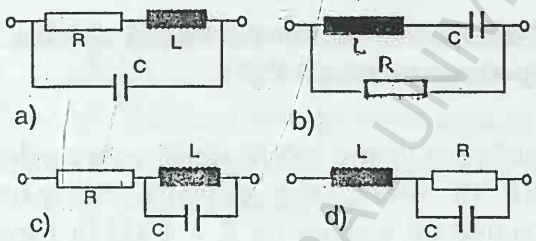
BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

35 Se dă o "cutie neagră" cu două borne exterioare. În interior este o bobină de inductanță L, cu pierderi ohmice neglijabile, un condensator de capacitate C și un rezistor de rezistență R. Se știe că dacă se aplică la cele două borne o tensiune continuă de 1V, curentul prin cutie va fi de 1 mA.

Dacă tensiunea este de 1V alternativă, cu frecvența de 50Hz, curentul devine 10 mA. Odată cu creșterea frecvenței crește și curentul, ajungînd la valoarea maximă la frecvența de 500 Hz. Să se deseneze schema "cutiei negre" și să se determine parametrii ei.

REZOLVARE:

Deoarece curentul continuu trece prin "cutie" trebuie ca C să nu fie în serie. Sînt posibile numai montajele în care curentul trece fie numai prin R, fie prin R și L, adică una din variantele:



Pentru oricare dintre ele $R = U_{=}/I_{=} = 1K\Omega$

Calculăm pentru fiecare montaj impedanța și amplitudinea intensității. Avem:

$$\underline{Za} = [(R + jL\omega)/jC\omega]/(R + jL\omega + 1/jC\omega); \rightarrow$$
$$\underline{Zb} = (jL\omega + 1/jC\omega)R/(R + jL\omega + 1/jC\omega); \rightarrow$$
$$\underline{Zc} = R + jL\omega/jC\omega/(jL\omega + 1/jC\omega); \rightarrow$$
$$\underline{Zd} = (jL\omega - RLC\omega^2 + R)/(1 + jC\omega R) \rightarrow$$

$$\rightarrow Za = \sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)/[R^2C^2\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2]} \rightarrow$$
$$\rightarrow Zb = R(1 - LC\omega^2)/\sqrt{[R^2C^2\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2]} \rightarrow$$
$$\rightarrow Zc = R + L\omega/(1 - LC\omega^2); \rightarrow$$
$$\rightarrow Zd = \sqrt{[R^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2]}/(1 + R^2C^2\omega^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow Ia_{(\omega)} = U\sqrt{[R^2C^2\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2]/(R^2 + L^2\omega^2)}$$

$\rightarrow Ib_{(\omega)} = U\sqrt{|R^2C^2\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2|}/R(1 - LC\omega^2)$;

$\rightarrow Ic_{(\omega)} = U(1 - LC\omega^2)/|L\omega + R(1 - LC\omega^2)|$

$\rightarrow Id_{(\omega)} = U\sqrt{(1 + R^2C^2\omega^2)/|L^2\omega^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2|}$

Studiind funcțiile $Ia_{(\omega)}$, $Ib_{(\omega)}$, $Ic_{(\omega)}$ și $Id_{(\omega)}$ găsim maxim doar pentru $Ib_{(\omega)}$ și anume cînd $1 - LC\omega_0^2 = 0$, adică $\omega_0 = 1/LC$ unde $\omega_0 = 1000\pi s^{-1}$ frecvența de rezonanță.

Din sistemul de ecuații:

$\omega_0^2 = 1/LC$

$I_b = U/\sqrt{|1/R^2 + 1/(\omega L - 1/C\omega)^2|}$ cu $\omega = 100\pi s^{-1}$

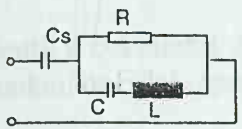
deducem $L = 3{,}14$ mH și $C = 32\ \mu F$.

Observație: Alegerea montajului corespunzător este posibilă și fără efectuarea calculelor de mai sus, pe baza următorului raționament:

La frecvențe mici reactanța capacitivă are valori ridicate, astfel încît poate fi neglijată în cazul în care este dispusă în paralel, ca în montajele a, c și d. Aceste montaje se comportă la frecvențe joase ca niște circuite RL serie, deci impedanța crește cu frecvența, iar intensitatea scade.

Circuitul b conține o ramură LC serie, a cărcia impedanță este 0 la rezonanță, deci intensitatea prezintă un maxim numai pentru acest circuit.

36 Se dă circuitul (electric liniar de curent alternativ monofazat) din figură, în care se cunosc C_s, R, L și C. Circuitul se alimentează la o tensiune alternativă sinusoidală de pulsație ω.



Să se determine: a) pulsația pentru care impedanța echivalentă a circuitului nu depinde de rezistența R a acestuia și valoarea impedanței în acest caz; b) pulsația pentru care impedanța echivalentă a circuitului este

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

infinită, ca și cînd acesta ar funcționa în gol.

REZOLVARE:

a) Impedanța echivalentă a circuitului în complexul simplificat:

$\underline{Z_e} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}\underline{Z_3}/(\underline{Z_2} + \underline{Z_3})$ unde $\underline{Z_1} = 1/j\omega Cs$;

$\underline{Z_2} = R$; $\underline{Z_3} = j(\omega L - 1/C\omega)$

Se obține:

$\underline{Z_e} = 1/j\omega Cs + jR(\omega L - 1/\omega C)/[R + j(\omega L - 1/\omega C)]$

care nu depinde de R dacă $\omega L - 1/\omega C = 0$, adică pentru pulsația $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ de rezonanță. În acest caz, impedanța echivalentă $\underline{Z_{e_0}} = -j\sqrt{LC}/Cs$ sau în modul $Z_{e_0} = \sqrt{LC}/Cs$

b) Pornind de la $\underline{Z_e} = -j/\omega Cs + jR(\omega L - 1/\omega C)/[R + j(\omega L - 1/\omega C)]$ se deduce:

$\underline{Z_e} = (\omega^2 LC - 1)^2 + j\omega R[Cs(\omega^2 LC - 1) - C]/\omega Cs[\omega RC + j(\omega^2 LC - 1)$

Modulul impedanței echivalente va fi:

$Z_e = 1/\omega Cs\sqrt{(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 R^2[Cs(\omega^2 LC - 1) - C]^2/[(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 R^2 C^2]}$

Pentru ca $Z_e \to \infty$ trebuie îndeplinită una din condițiile:

1) fie $\omega = 0$ cazul banal al curentului continuu;

2) fie $\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2 = 0$ anularea numitorului lui Z_e, ceea ce ne conduce la o ecuație bipătrată în ω:

$L^2 C^2 \omega^4 + (R^2 C^2 - 2LC)\omega^2 + 1 = 0$

Substituim $\omega^2 = v$, cu condiția $v > 0$, $v \in R$

$L^2 C^2 v^2 + (R^2 C^2 - 2LC)v + 1 = 0$

Discriminantul $= R^2 C^2(R^2 C^2 - 4LC)$ trebuie să fie pozitiv: adică $R^2 > 4L/C$ sau $R > 2\sqrt{L/C}$ pentru ca $v \in R$.

Rezultă soluțiile:

$v_{1,2} = [-(R^2 C^2 - 2LC) \pm RC\sqrt{R^2 C^2 - 4LC}]/2L^2 C^2$

Excludem rădăcina negativă (se impune $v > 0$ pentru ca $\omega \in$ Re) deci ar rămîne rădăcina cu + în fața radicalului:

$v = [RC\sqrt{R^2C^2 - 4LC} - (R^2C^2 - 2LC)]/2L^2C^2 =$

$= [R\sqrt{R^2C^2 - 4LC} - (R^2C - 2L)]/2L^2C$,

căreia,impunîndu-i să fie pozitivă:

$R\sqrt{R^2C^2 - 4LC} > R^2C - 2L$

ne conduce la rezultatul absurd $4L^2 < 0$. Aşadar, rădăcinile ecuaţiei bipătrate sînt imaginare, ceea ce înseamnă că nu există frecvenţă $\omega > 0$ pentru care $Ze \to \infty$.

Observaţie:

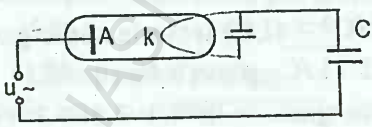
a) Impedanţa ramurii LC serie devine 0 dacă $\omega L = 1/\omega C$, astfel încît aceasta scurtcircuitează rezistorul. Impedanţa circuitului în aceste condiţii nu mai depinde de R şi este egală cu reactanţa primului condensator:

$Z = 1/\omega Cs$, $\omega = 1/\sqrt{LC}$, **deci** $Z = \sqrt{LC}/Cs$

b) Impedanţa infinită presupune curent de intensitate 0 în ramura principală a circuitului. Aceasta ar însemna ca prin cele două ramuri dispuse în paralel (R şi respectiv LC) să treacă curenţi de intensităţi egale şi în opoziţie de fază, ceea ce nu se poate întîmpla, deoarece defazajul între aceştia este $\pi/2$. Singura soluţie este deci $\omega = 0$.

37 a) Dacă o bobină ideală de inductanţă L şi un rezistor cu rezistenţa R se leagă în serie la o sursă de curent alternativ, factorul de putere al circuitului este $\cos\varphi_s = 0{,}6$. Să se calculeze factorul de putere $\cos\varphi_p$, dacă bobina şi rezistorul se leagă în paralel la aceeaşi sursă ideală de curent alternativ.

b) Se consideră o diodă ideală



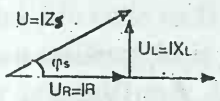
(Rd $=\infty$ pentru $U_A < 0$ şi Rd = 0 cînd $U_A > 0$) montată într-un circuit de curent alternativ, ca în figură. Să se reprezinte grafic, în funcţie de timp, intensitatea curentului electric prin circuit, tensiunea la bornele condensatorului şi tensiunea între anodul şi catodul diodei.

(Olimpiada Naţională de Fizică 1991, Brăila)

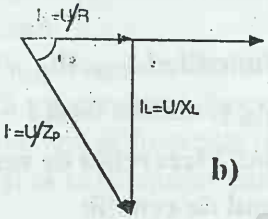
BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

REZOLVARE:

a) Reprezentînd diagramele fazoriale pentru circuitul serie (a), respectiv paralel (b):



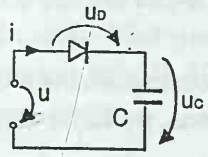
a)



b)

se observă $tg\varphi_S = X_L/R$, $tg\varphi_p = R/X_L$, deci $tg\varphi_S = ctg\varphi_p$. Prin urmare $\varphi_S + \varphi_p = \pi/2$, deci $\cos\varphi_p = \sin\varphi_S = \sqrt{1 - \cos^2\varphi_S}$

b)

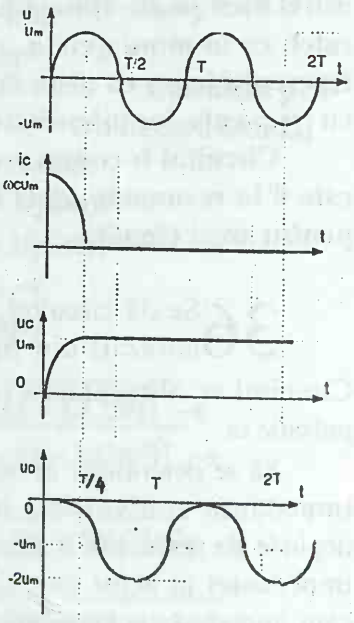


Fie $u = Um \sin\omega t$, iar condensatorul inițial neîncărcat.

Dioda conduce ($R_D = 0$), curentul în circuit va fi $i = Um \sin(\omega t + \pi/2)/X_C$, $u_C = u$, $u_D = 0$.

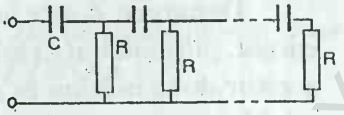
La $t = T/4$; $i = 0$, $u_C = Um$, dioda se blochează ($R_D \to \infty$), nepermițînd trecerea curentului în sens invers. Condensatorul rămîne încărcat, cu tensiunea la borne $u_C = Um$, $u_D = u - u_C = Um(\sin\omega t - 1)$.

Reprezentare grafică a mărimilor cerute:



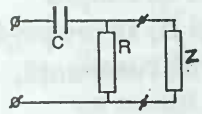
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

38 Să se afle rezistența activă și reactanța echivalente ale rețelei infinite din figură:



REZOLVARE:

Pentru un număr foarte mare de elemente, adăugarea unei celule suplimentare nu modifică impedanța:



$$\underline{Z} = -jX + R\underline{Z}/(\underline{Z} + R)$$

Din această condiție se obține ecuația:

$$\underline{Z}^2 + jX\underline{Z} + jXR = 0,$$

cu soluțiile:

$$\underline{Z}_{1,2} = [-jX \pm \sqrt{(-X^2 - 4jRX)}]/2 \quad .$$

Punînd $-X^2 - 4jRX = (a + jb)^2$, prin identificare se obține sistemul:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -X^2 \\ ab = -2RX \end{cases} .$$

Rezolvînd, se obține:

$$a = \sqrt{2}\sqrt{X(\sqrt{X^2 + 16R^2} - X)}/2 \quad ,$$

$$b = \sqrt{2}\sqrt{X(\sqrt{X^2 + 16R^2} + X)}/2 \quad ,$$

$$\underline{Z}_{1,2} = \pm\sqrt{2}\sqrt{X(\sqrt{X^2 + 16R^2} - X)}/4 - j\sqrt{2}[2X \pm$$

$$\pm\sqrt{X(\sqrt{X^2 + 16R^2} + X)}]/4 \quad .$$

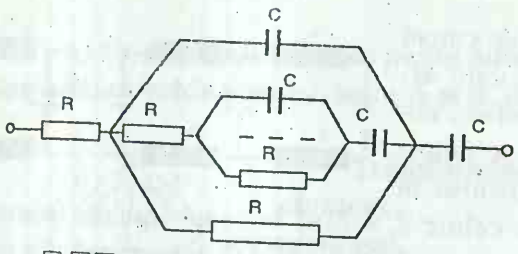
Se alege soluția astfel încît $Re > 0$, deci:

$$Re = \sqrt{2}\sqrt{X(\sqrt{X^2 + 16R^2} - X)}/4 \quad ,$$

$$Xe = \sqrt{2}\sqrt{X(\sqrt{X^2 + 16R^2} + X)}/4 \quad .$$

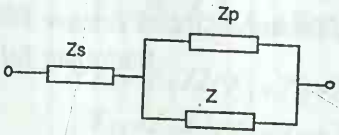
39 Să se găsească impedanța echivalentă a circuitului din figură dacă $X_C = R$, considerînd numărul de celule foarte mare.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



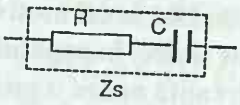
REZOLVARE:

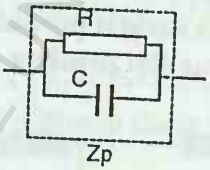
Adăugarea unei noi celule nu modifică impedanța:



$$\underline{Z} = \underline{Z}s + \underline{Z}\,\underline{Z}p/(\underline{Z} + \underline{Z}p),$$

unde $\underline{Z}s$ și $\underline{Z}p$ sînt impedanțele complexe ale circuitelor RC serie, respectiv paralel:





$\underline{Z}s = R - jX_C = R(1 - j);$

$\underline{Z}p = -jRX_C/(R - jX_C) = R(1 - j)/2$

Se obține ecuația:

$\underline{Z}^2 - R(1 - j)\underline{Z} - R^2(1 - j)^2/2 = 0,$

cu soluții:

$\underline{Z}_{1,2} = R(1 - j)(1 \pm \sqrt{3})/2.$

Se reține soluția care satisface condițiile:

$Re\underline{Z} = R_e > 0,\ Im\underline{Z} = -X_e < 0$ **(reactanță capacitivă),**

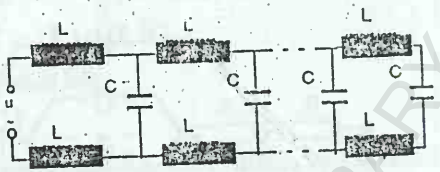
deci

$R_e = X_e = R(1 + \sqrt{3})/2,$

$Z_e = R\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})/2$

BCU MAIN CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

40 Un circuit de curent alternativ este alcătuit din n celule identice, cuplate ca în figură. Să se determine impedanța circuitului în funcție de numărul de celule Z = Z(n) în cazul în care frecvența tensiunii de alimentare este $\nu = 1/2\pi \times 1/\sqrt{2LC}$. Interpretați din punct de vedere fizic rezultatul obținut. Încercați să extindeți rezultatul în cazul cînd constantele L și C nu mai sînt concentrate, ci distribuite continuu și uniform (cablu bifilar sau coaxial). Discuție calitativă.

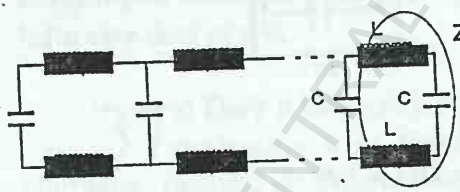


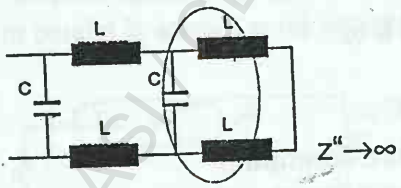
(Tabăra de fizică Brașov 1993)

Bădrăgan Iulian

REZOLVARE:

Ultima celulă din șir este un circuit serie LC cu frecvența de rezonanță $\omega_{rez} = 1/\sqrt{2LC}$ identică cu cea dată în problemă. Astfel impedanța acestei porțiuni este nulă. Din acest motiv, condensatorul imediat următor este șuntat și deci în capătul din dreapta apare o grupare LC paralel. Impedanța acesteia la frecvența dată este infinită și deci se comportă ca o întrerupere.





Cele două bobine ale următoarei celule rămîn astfel inutile și nu contribuie cu nimic la impedanța totală. Am parcurs astfel trei celule și mai departe lucrurile se repetă.

Concluzia este că Z(n) este o funcție periodică de perioadă 3, astfel:

$$Z(n) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n = 3k+1 \\ 2\omega L & \text{pentru } n = 3k+2 \\ \infty & \text{pentru } n = 3k \end{cases} \qquad k = 1, 2 \ldots\ldots$$

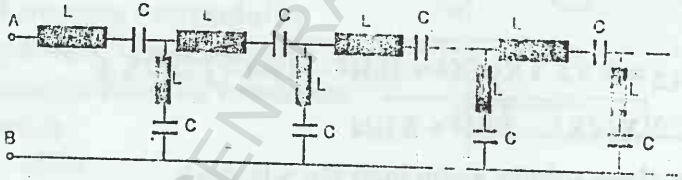
BOLIASU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece Z este în fond un raport între o tensiune și un curent, periodicitatea lui Z implică automat periodicitatea acestor două mărimi în raport cu n. Această situație e analoagă celei în care o undă, acustică de exemplu, formează noduri și ventre într-un tub sonor. Mărimile U și I se comportă deci ca niște unde care se propagă în circuit, situație care în fond este chiar cea reală. Se poate merge și mai departe dacă se observă că U derivă din cîmpul electric $\vec{E}$, iar I este cuplat cu cîmpul magnetic $\vec{B}$ în bobine și afirma că acestea ($\vec{E}$ și $\vec{B}$) se propagă prin circuit, iar la frecvența $\nu_{rez} = 1/2\pi\sqrt{2LC}$, de rezonanță, determină unde staționare.

Pentru liniile bifilare sau coaxiale, constantele L și C se distribuie în lungul acestora, astfel că numărul de celule n devine în acest caz lungime a liniei. Concluzia calitativă pe care o putem trage este că o asemenea linie se comportă ca impedanță în diverse moduri în funcție de lungimea lor.

(soluția autorului)

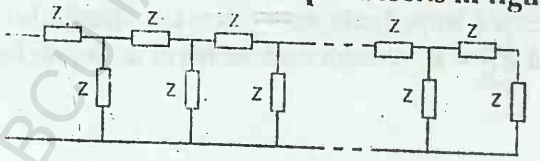
4.1 Se consideră rețeaua infinită din figură, în care se cunosc L și C. Să se determine impedanța electrică echivalentă Z_{AB} a rețelei știind că aceasta este conectată prin bornele A și B la o

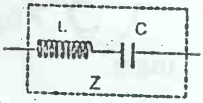


tensiune alternativă sinusoidală de pulsație ω. Să se discute soluțiile posibile ale problemei în funcție de ω.

REZOLVARE:

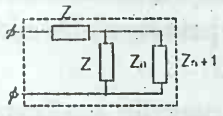
Rețeaua este de tipul descris în figura alăturată:





BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru n celule impedanța este Z_n, iar pentru n + 1 Z_{n+1}:



$$\underline{Z}_{n+1} = \underline{Z} + \underline{Z}\underline{Z}_n/(\underline{Z}_n + \underline{Z})$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} Z_{n+1} = Z_{AB},$$

obținem ecuația:

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z} + \underline{Z}\underline{Z}_{AB}(\underline{Z} + \underline{Z}_{AB}) \text{ sau } \underline{Z}^2_{AB} - \underline{Z}\underline{Z}_{AB} - \underline{Z}^2 = 0,$$

cu soluții

$$\underline{Z}_{AB} = Z(1 \pm \sqrt{5})/2$$

Impedanța circuitului este

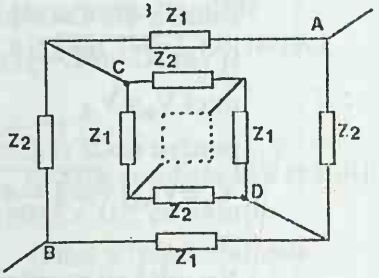
$$Z_{AB} = (X_L - X_C)(\sqrt{5} + 1)/2 = (\omega L - 1/\omega C)(\sqrt{5} + 1)/2.$$

Rețeaua se comportă ca un circuit LC serie, cu

$$L_e = L(\sqrt{5} + 1)/2, \qquad C_e = 2C/(\sqrt{5} + 1).$$

Impedanța devine 0 pentru $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

42 Să se calculeze impedanța echivalentă Z_{AB} a circuitului prezentat în figură, dacă numărul elementelor componente tinde spre infinit în următoarele cazuri:



1) z_1 este o inductanță ideală L_1, iar z_2 este o inductanță ideală L_2;

2) z_1 este o capacitate ideală C_1, iar z_2 este o capacitate ideală C_2;

3) z_1 este o inductanță ideală L, iar z_2 este o capacitate ideală C;

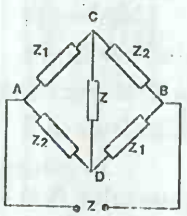
4) Să se comenteze rezultatele.

(În toate cazurile se consideră circuitul cuplat cu o sursă de tensiune alternativă sinusoidală de frecvență constantă ω) *(O.N.F. Brașov 1993)*

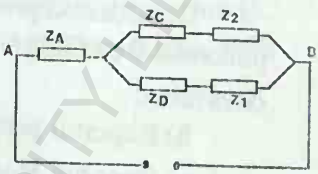
BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

REZOLVARE

a) Considerînd rețeaua punte infinită putem considera impedanța echivalentă Z între A și B, dar și între C și D:



Transformînd triunghiul ACD în stea, obținem montajul echivalent:



cu

$Z_A=Z_1Z_2/(Z_1+Z_2+Z)$,

$Z_C=Z_1Z/(Z_1+Z_2+Z)$ și

$Z_D=Z_2Z/(Z_1+Z_2+Z)$.

În urma grupărilor paralel și serie, obținem:

$$Z=Z_1Z_2/(Z_1+Z_2+Z)+\{[(Z_1Z_2+Z_2^2+Z(Z_1+Z_2)][Z_1Z_2+Z_1^2+Z(Z_1+Z_2)]\}/(Z_1+Z_2+Z)(Z_1^2+Z_2^2+2Z_1Z_2+2ZZ_1+2ZZ_2).$$

Rezolvînd ecuația în Z găsim în final:

$Z=\sqrt{Z_1Z_2}$.

Apoi, particularizînd, obținem pentru cazurile enunțate:

1) $Z=j\omega\sqrt{L_1L_2}$

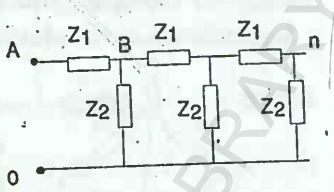
2) $Z=-j/\omega\sqrt{C_1C_2}$

3) $Z=\sqrt{L/C}$

4) În concluzie sistemul obținut este neacordabil, comportîndu-se ca un unic element de circuit, în cazul 1 ca o bobină cu $Le=\sqrt{L_1L_2}$, în cazul 2 ca un condensator de $Ce=\sqrt{C_1C_2}$, iar în cazul 3 aparent ca un rezistor de $Re=\sqrt{L/C}$. Ultimul rezultat este însă inacceptabil, întrucît o rețea compusă numai din reactanțe nu se poate comporta ca un element activ. Șirul impedanțelor nu este, în acest caz, convergent.

BUCUREȘTI - CENTRU - UNIVERSITY LIBRARY

43 Să se calculeze impedanța echivalentă a rețelei din figură care are un număr infinit de celule Z_1,Z_2 în cazurile:



a_1) $Z_1=Z_2=R$;

a_2) $Z_1=R_1$; $Z_2=R_2$;

a_3) $Z_1=L\omega$; $Z_2=1/C\omega$

Considerînd potențialul punctului 0 ca fiind $V_0=0$, să se determine:

b) Raportul potențialelor V_A și V_B ale punctelor A și B;

c) Raportul Vn/V_A pentru cazul $\omega>2/\sqrt{LC}$

(Să se comenteze rezultatul)

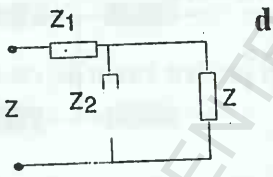
(O.N.F. Sibiu 1992)

REZOLVARE

a) Cum rețeaua este infinită, prin adăugarea a încă unei celule Z_1,Z_2, impedanța Z nu se modifică, deci

$$\underline{Z}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\underline{Z}/(\underline{Z}_2+\underline{Z})$$

De aici rezultă ecuația de gradul al doilea:



$$\underline{Z}^2-\underline{Z}_1\underline{Z}-\underline{Z}_1\underline{Z}_2=0 \text{ cu soluțiile}$$

$$\underline{Z}=(\underline{Z}_1\pm\sqrt{\underline{Z}_1^2+4\underline{Z}_1\underline{Z}_2})/2$$

Pentru $Z_2=0$, $Z=Z_1$, astfel încît singura soluție acceptabilă este:

$$\underline{Z}=(\underline{Z}_1+\sqrt{\underline{Z}_1^2+4\underline{Z}_1\underline{Z}_2})/2$$

Particularizăm rezultatul, obținînd:

a_1) **pentru** $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=R$, $Z=R(1+\sqrt{5})/2$

a_2) **pentru** $\underline{Z}_1=R_1$ **și** $\underline{Z}_2=R_2$, $Z=(R_1+\sqrt{R_1^2+4R_1R_2})/2$

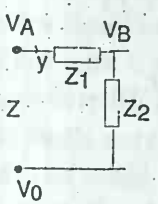
a_3) **pentru** $\underline{Z}_1=jL\omega$ **și** $\underline{Z}_2=1/jC\omega$

$\underline{Z}=jL\omega/2+1/2\sqrt{(-\omega^2L^2+4L/C)}$

Observație: Șirul impedanțelor este divergent pentru $\omega<2/(LC)^{-1/2}$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) Avem relația: $V_A/Z=(V_A-V_B)/Z_1$



provenită din exprimarea în două moduri a curentului principal. De aici: $V_B/V_A=1-Z_1/Z$

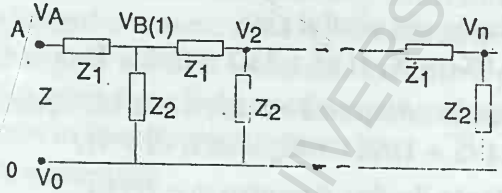
care devine în cazurile analizate:

$a_1)$ $V_B/V_A= 1-2/(1+\sqrt{5})=(\sqrt{5}-1)/(1+\sqrt{5})$

$a_2)$ $V_B/V_A=1-2/(1+\sqrt{1+4R_2/R_1})$

$a_3)$ $V_B/V_A=1-jL\omega/(jL\omega/2+1/2\sqrt{4L/C-\omega^2L^2})=(\sqrt{4L/C-\omega^2L^2}-jLw)/(\sqrt{4L/C-\omega^2L^2}+jLw)$

c) Obținem, pe rînd, $(V_2-V_B)/Z_1=V_2/Z$ de unde



$V_2/V_B=1-Z_1/Z$

Înmulțind cu $V_B/V_A=1-Z_1/Z$ rezultă $V_2/V_A=(1-Z_1/Z)^2$

Prin inducție $V_3/V_A=(1-Z_1/Z)^3$... pînă la

$V_n/V_A=(1-Z_1/Z)^n$,

adică

$\underline{V}_n=\underline{V}_A[(\sqrt{4L/C-\omega^2L^2}-jL\omega)/(\sqrt{4L/C-\omega^2L^2}+jL\omega)]^n$

Pentru $4L/C>\omega^2L^2$, adică $\omega<2/(LC)^{1/2}$ rezultă

$|(\sqrt{4L/C-\omega^2L^2}-jL\omega)/(\sqrt{4L/C-\omega^2L^2}+jL\omega)|=1$,

deci $V_n=V_A$

pentru $\omega>2/\sqrt{LC}$ obținem

$V_n=V_A|(\sqrt{\omega^2L^2-4L/C}-L\omega)/(\sqrt{\omega^2L^2-4L/C}+L\omega)|^n$

Rezultă că montajul lucrează ca filtru trece-jos pentru $\omega<2/\sqrt{LC}$

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

44 O baterie de acumulatori cu t.e.m. E=7,5V este încărcată cu ajutorul unui redresor monoalternanță. Dioda din circuit are caracteristica curent tensiune descrisă de relația:

$$i=\begin{cases}0{,}2U-0{,}1(A) & \text{pentru } U\geq 0{,}5V\\ 0 & \text{pentru } U<0{,}5V\end{cases}$$

Știind că tensiunea la bornele secundarului este $u=U_{max}\sin\omega t$, unde $U_{max}=16V$, $\omega=100\pi s^{-1}$, iar rezistența bobinei din secundar este $r=45\Omega$, se cere:

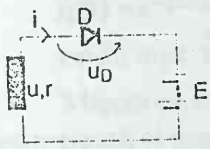
a) Să se reprezinte grafic intensitatea curentului din circuit funcție de timp;

b) Să se afle intervalul de timp Δt în decursul unei perioade în care dioda conduce;

c) tensiunea pe diodă în momentul t = 0,805s;

d) valoarea medie a curentului de încărcare a bateriei .

REZOLVARE



a) Legea a II-a a lui Kirchhoff pentru circuitul de încărcare, cînd dioda conduce se scrie:

$$u-E=ir+u_D$$

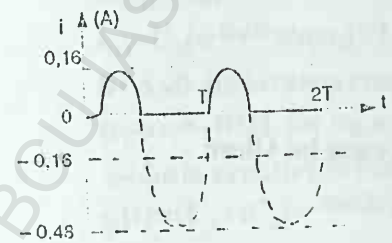
Din ecuația caracteristicii, pentru $i\geq 0$, se obține

$$u_D=(i+0{,}1)/0{,}2$$

de unde, prin înlocuire în prima ecuație rezultă:

$$i=[0{,}2(u-E)-0{,}1]/(1+0{,}2r)=0{,}32\sin 100\pi t-0{,}16\ (A)$$

Reprezentare grafică:



b) Din condiția $i\geq 0$ rezultă $\sin 100\pi t\geq 1/2$, cu soluția:

$$100\pi t\in[\pi/6,5\pi/6]\ \text{sau}$$

$$t\in[1/600s,\ 5/600s]$$

Pe parcursul unei perioade, dioda este deschisă un interval de

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

timp $\Delta t = t_2 - t_1 = 6{,}66ms$

c) La $t = 0{,}805s$, $i = 0{,}32\sin 80{,}5\pi - 0{,}16 = 0{,}16A$

tensiunea pe diodă $u_D = (0{,}16+0{,}1)/0{,}2 = 1{,}3V$

d) Valoarea medie a intensității, prin definiție este $\langle i\rangle = \Delta q/\Delta t$

Fiind vorba de o funcție periodică $\langle i\rangle = q/T$, unde q este sarcina care străbate o secțiune a circuitului într-o perioadă.

Din definiția valorii instantanee $i = dq/dt$ se obține, prin integrare, q:

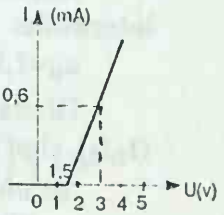
$$q = \int_0^T i\,dt$$

Valoarea medie a intensității se exprimă deci:

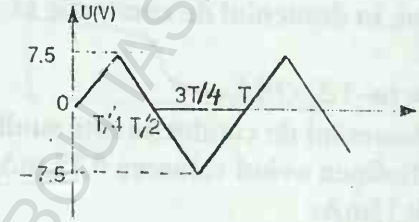
$$\langle i\rangle = 1/T \int_0^T i(t)\,dt$$

Prin calcul se obține $\langle i\rangle = 0{,}035A$

45 Înseriem circuitul a cărui caracteristică este prezentată în figură cu un rezistor $R = 7{,}5k\Omega$ și aplicăm la bornele circuitului astfel format o tensiune sinusuidală de forma $u = 3\sin 100\pi t$ (V).



a) Trasați graficul tensiunii la bornele rezistorului de sarcină în funcție de timp în decursul unei perioade.



b) Presupunînd că sursa furnizează o tensiune de forma reprezentată mai jos avînd perioada $T = 20ms$, să se trasez/e graficul intensității curentului prin circuit în decursul unei perioade.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

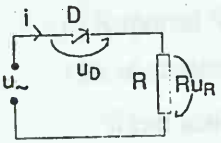
c) Calculați intensitatea medie și cea efectivă a curentului în condițiile de la punctul b).

(O.F. municipiu 1991)

REZOLARE

a)În figură este reprezentată caracteristica liniarizată a unei diode, care conduce cînd U ≥ 1,5V, domeniu în care relația între intensitate și tensiune se poate scrie:

$$I/(u-1,5)= 0,6\times10^{-3}/1,5 \text{ , sau } u=1,5(I/0,6\times10^{-3}+1)$$



În legea a doua a lui Kirchhoff:

$u=u_D+iR$ **se înlocuiește**

$u_D=1,5(i/0,6\times10^{-3}+1)$, **rezultînd intensitatea curentului în circuit :**

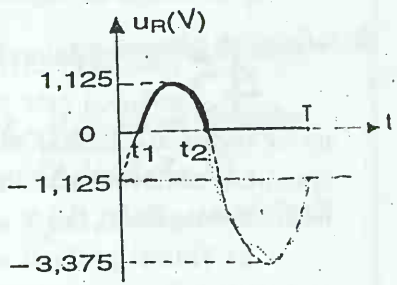
$$i=(u-1,5)/(2,5\times10^3+R)$$

Căderea de tensiune pe rezistorul de sarcină $u_R=iR$ va avea expresia

$$u_R=R\,(u-1,5)/(2,5\times10^3+R)\text{ ,}$$

sau, efectuînd toate înlocuirile:

$$u_R=1,125(2\sin100\pi t-1)$$



Dioda conduce în intervalul (t_1,t_2), cînd i>0, deci u_R>0,

de unde

$t_1=T/12$, $t_2=5\,T/12$.

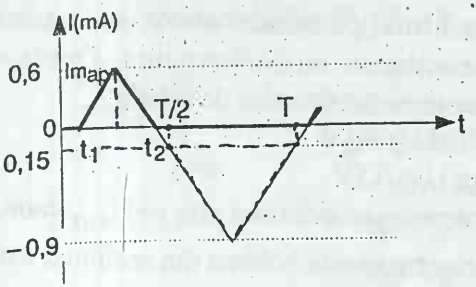
În afara acestui interval i=0, u_R=0.

b) Intensitatea curentului, în domeniul de conducție al diodei, se exprimă :

$$i= (u-1,5)/(2,5\times10^3+R) = (u-1,5)\times10^{-4}$$

Graficul intensității în domeniul de conducție este similar cu la tensiunii aplicate, amplitudinea avînd valoarea 0,75 mA, fiind însă translatat în jos cu 0,15mA:

BCU "ASTRA" CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY



Deschiderea diodei are loc la momentele $t_1'=T/20=1ms$, conducînd pînă la $t_2'=9T/20=9ms$

c)

$$\langle i\rangle = 1/T\int_0^T i(t)dt = I_{max}(t_2'-t_1')/2T = 0,12mA$$

$$I = \sqrt{1/T\int_0^T i^2(t)dt};$$

Ţinînd cont de simetria graficului se poate scrie

$$\int_0^T i^2(t)dt = 2\int_{t_1}^{(t_1'+t_2')/2} i^2(t)dt \text{ , unde ,pe domeniul de integrare}$$

$$i=2I_{max}(t-t_1')/(t_2'-t_1').$$

În urma calculelor se obtine

$$I= I_m\sqrt{(t_2'-t_1')/3T} = I_m\sqrt{2/15} = 0,22mA \text{ .}$$

46 Se consideră circuitul din figură în care toate elementele sînt ideale . La momentul t=0 circuitul se închide .

a)Să se descrie fenomenele care se produc în circuitul închis;

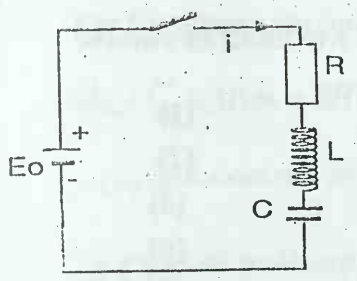
b) Să se reprezinte grafic evoluţia în timp a tensiunii u_C la bornele condesatorului şi a intensităţii i a curentului din circuit pentru cazurile: $R<2\sqrt{L/C}$; $R=2\sqrt{L/C}$; $R>2\sqrt{L/C}$.

REZOLVARE

La închiderea circuitului, Legea lui Ohm:

$$E_0+e_a=Ri+q/C$$

BCU "AUREL VLAICU" UNIVERSITY LIBRARY



devine:

$L di/dt+Ri+q/C=E_0$ (1)

unde $i=dq/dt$ iar

$1/LC=\omega_0^2$ (pulsația proprie)

Soluția ecuației (1) este de forma :

$q(t)\sim e^{\alpha t}$

pentru ecuația omogenă la care se adaugă o soluție particulară a ecuației neomogene:

$q=E_0/L\omega_0^2$.

Pentru ecuația omogenă obținem ecuația caracteristică

$\alpha^2+R\alpha/L+\omega_0^2=0$ (2)

al cărui discriminant $\Delta = R^2/4L^2 - \omega_0^2$ poate fi:

a) $\Delta<0$ deci $R/2L<\omega_0$ (rezistență mică) pentru care rădăcinile ecuației (2) sînt complexe și ne conduc la soluția:

$q(t) =e^{-Rt/2L}(C_1e^{i\omega_1 t}+ C_2e^{i\omega_2 t})$

unde $\omega_1= \sqrt{\omega_0^2-R^2/4L^2}$ este pseudopulsația .

Mișcarea sarcinii este oscilatorie pseudo periodică , amortizată și poate fi pusă sub forma finală :

$q(t) =Qe^{-Rt/2L}\sin(\omega_1 t+\varphi)+E_0/L\omega_0^2$

Din condițiile inițiale $t_0=0$; $q_{(0)}=0$ rezultă

$Q\sin\varphi=- E_0/L\omega_0^2$ și din $i_{(0)}=0$; $\cos\varphi=0$, deci $\varphi=90°$ Astfel încît

$Q=- E_0/L\omega_0^2=-E_0C$ și de aici $q(t)=E_0C(1- e^{-Rt/2L}\cos\omega_1 t)$

Tensiunea la bornele condesatorului va fi:

$u_{C(t)}=E_0(1- e^{-Rt/2L}\cos\omega_1 t)$ iar intensitatea curentului

$i_{(t)}=E_0(e^{-Rt/2L}\sin\omega_1 t)/L\omega_0$ (v.fig.a)

b) $\Delta=0$ încărcarea condesatorului este aperiodică critică

$\alpha_1=\alpha_2=-R/2L$ iar $\omega_0 = R/2L$

Soluția ecuației neomogenese scrie

$q(t)=(C_1+tC_2)e^{-Rt/2L}+ E_0C$ și cu condițiile inițiale

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$q_{(0)}=0$ și $i_{(0)}=0$ rezultă .

$C_1=E_0C$ iar $C_2=-E_0CR/2L$, astfel că :

$q(t)=E_0C[1-(1+Rt/2L)\,e^{-Rt/2L}]$;

$uc_{(t)}=E_0[(1-(1+Rt/2L)\,e^{-Rt/2L}]$ iar $i(t)=E_0te^{-Rt/2L}/L$ (fig b)

c) Dacă $\Delta>0$ deci $R>2\sqrt{L/C}$ rădăcinile ecuației caracteristice sînt reale $\alpha_{1,2}=-R/2L\pm\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2}$ soluția generală a ecuației (1) devine:

$$q(t)=e^{-Rt/2L}[C_1e^{(\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2})t}+C_2e^{(-\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2})t}]+E_0C$$

și reprezintă o încărcare aperiodică .

Din condițiile inițiale ($q_{(0)}=0$ și $i_{(0)}=0$) rezultă în final:

$q_{(t)}=E_0C-(E_0C\,e^{-Rt/2L}/2\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2})[(R/2L+$

$+\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2})e^{\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2}t}-(R/2L-$

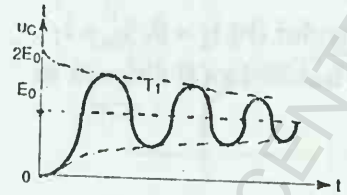
$-\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2})e^{-\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2}t}]$, și $u_{c(t)}=q(t)/C$, iar

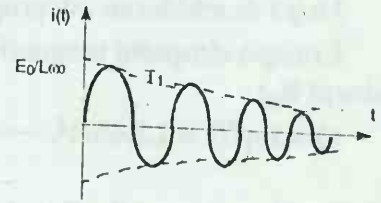
$i_{(t)}=(E_0/2L\times\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2})(e^{\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2}t}+$

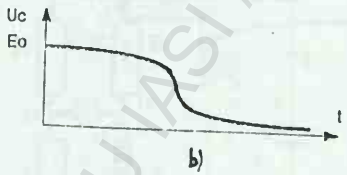
$+e^{-\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2}t}\times(e^{-Rt/2L})$

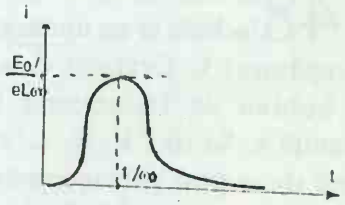
ceea se mai poate scrie :

$$i_{(t)}=(E_0/L\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2})\,e^{-Rt/2L}sh(\sqrt{R^2/4L^2-\omega_0^2}\,t)$$



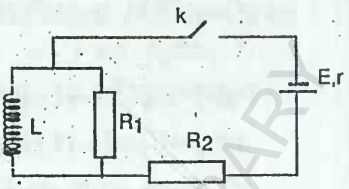




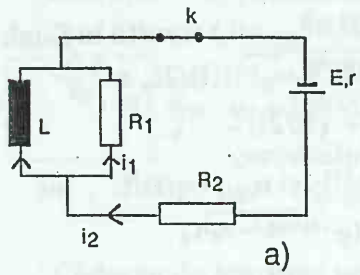


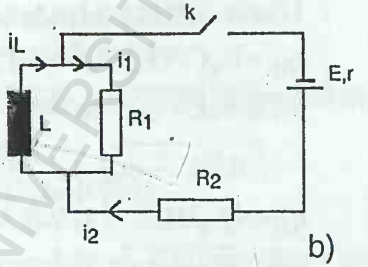
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

47 În schema prezentată în figură, la momentul inițial întrerupătorul k este închis. Să se determine căldura eliberată de rezistorul R_1 după deschiderea lui k, știind că $r = R_1 = R_2 = R$, t.e.m. a sursei E și inductanța bobinei L.



REZOLVARE





Înainte de deschiderea întrerupătorului (a) bobina ideală scurtcircuitează rezisterul R_1, astfel încît

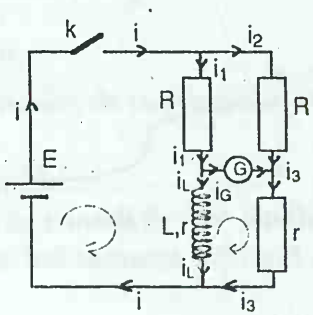
$$i_1 = 0,\ i_L = i_2 = E/(r + R_2) = E/2R.$$

După deschiderea întrerupătorului (b) $i_2 = 0,\ i_L = i_1$

Energia cîmpului magnetic al bobinei va fi disipată în rezistorul R_1:

$$Q = Li_{1,}^2/2 = LE^2/8R^2.$$

48 În schema din figură se închide la un moment dat întrerupătorul k. Evaluați curentul prin bobina de inductanță L și rezistență r. Se dau E, R, L, r. Ce sarcină trece prin galvanometrul G după închiderea lui k? Rezistența galvanometrului este neglijabilă.



BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

REZOLVARE

În regim tranzitoriu, legile lui Kirchhoff ne conduc la ecuațiile:

$i = i_1 + i_2$ (1)

$i_1 = i_G + i_L$ (2)

$i_L + i_3 = i$ (3)

$i_L r - i_3 r = -L di_L/dt$ (4)

$Ri_1 + ri_L = E - Ldi_L/dt$ (5)

$i_1 R + i_G R_G - i_2 R = 0$ (6)

Din (1) și (6) rezultă, punînd $R_G = 0$:

$i_1 = i_2 = i/2$

Înlocuind în ecuația (4), avem:

$2i_L - 2i_1 = -Ldi_L/dt \cdot (1/r)$ (4')

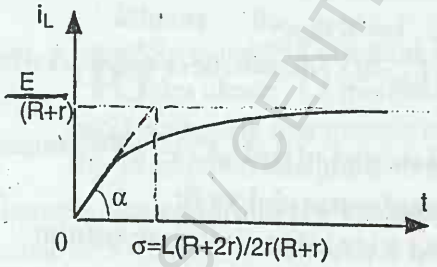
iar din (5) $i_1 = 1/R\,[E - Ldi_L/dt - ri_L]$ (5')

Introducem (5') în (4'), care devine ecuația diferențială neomogenă:

$L(2/R + 1/r)\, di_L/dt + 2(1 + r/R)i_L = 2E/R$ (7)

cu soluția:

$i_L(t) = E\,[1 - e^{-2r(R + r)t/L(R + 2r)}]/(R + r)$, a cărei reprezentare grafică o alăturăm:



Din (2) scoatem $i_G = i_1 - i_L$ și înlocuind i_1 și i_L, găsim:

$i_G = E/R - Ldi_L/dt \cdot \frac{1}{R} - i_L(r + R)/R$. Mai departe:

$i_G(t) = E/R - LE/R(R + r) \times [2r(R + r)e^{-2r(R + r)t/L(R + 2r)}]$
$/L(R + 2r) - [E/(R + r)] \times [(r + R)\,(1 - e^{-2r(R + r)t/L(R + 2r)})/R] =$
$= E/R \times Re^{-2r(R + r)t/L(R + 2r)}/(R + 2r)$

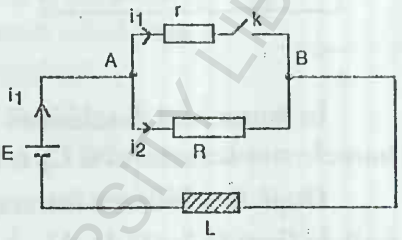
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru aflarea sarcinii ce se scurge prin (G):

$$Q_G = \int_0^\infty i_G(t)dt = E/(R + 2r) \times L(R + 2r)/2r(R + r)] \times$$

$$\times [-e^{-2r(R+r)t/L(R+2r)}]_0^\infty = EL/2r(R + r)$$

49 Să se analizeze variațiile curenților și tensiunii u_{AB} din circuitul prezentat în figură la închiderea, respectiv deschiderea întrerupătorului k. Se dau E, r, R și L.



REZOLVARE

1) La închiderea întrerupătorului k.

Prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff se obține sistemul:

$i = i_1 + i_2$

$i_1 r = i_2 R$

$i_2 R = E - L di/dt,$

de unde, prin substituții succesive:

$i_1 = i_2 R/r$, $i = i_2(R/r + 1)$, **se obține ecuația diferențială cu variabile separabile:**

$iRr/(R + r) = E - L di/dt$, **care poate fi scrisă:**

$i - E/Rp = -di/dt \times L/R_p$ **sau** $di/(i - I) = -dt/\tau$, **unde**

$R_p = Rr/(R + r)$, $\tau = L/R_p$, $I = E/R_p$.

La momentul inițial $t = 0$ **cînd se închide întrerupătorul,**

$i = I_0 = E/R.$

Integrînd:

$$\int_{I_0}^{i} di/(i - I) = -1/\tau \int_0^t dt$$

se obține

$\ln (i - I)/(I_0 - I) = -t/\tau$, **sau** $i = I + (I_0 - I)e^{-t/\tau}$.

BCU MATEMATICĂ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Înlocuind I, Io și revenind în sistemul inițial, se obțin soluțiile:

$$i = E(1/R + 1/r) - Ee^{-t/\tau}/r$$

$$i_1 = [E(1 - Re^{-t/\tau}/(R + r)]/r$$

$$i_2 = [E\ (1 - Re^{-t/\tau}/(R + r)]/R,$$

$$u_{AB} = i_2R = E[1 - Re^{-t/\tau}/(R + r)].$$

2) La deschiderea întrerupătorului:

$i_1 = 0$, $i_2 = i$, $iR = E - Ldi/dt$.

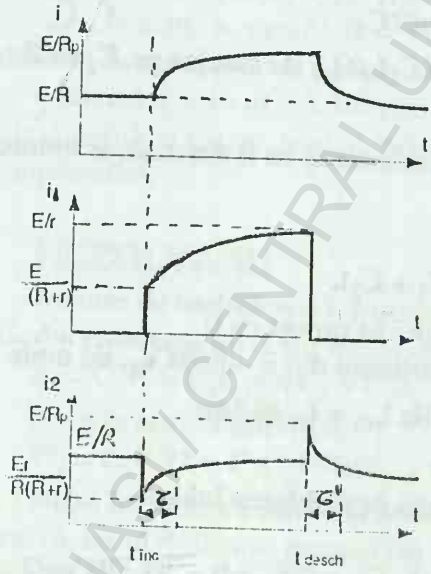
În momentul deschiderii întrerupătorului

$i = I_0' = E/R_p$.

Prin integrare se obține:

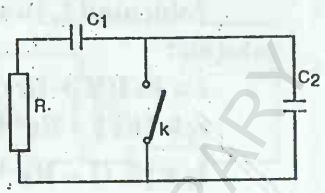
$i_2 = i = E(1 + Re^{-t/\tau'}/r)/R$, unde $\tau' = L/R$

$u_{AB} = E\ (1 + Re^{-t/\tau'}/r)$.



BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

50 Un condensator de capacitate C_1 se descarcă prin rezistorul de rezistență R. Cînd intensitatea curentului de descărcare este I_0 se deschide întrerupătorul k.



Calculați căldura care se va degaja pe rezistor începînd din acest moment.

REZOLVARE

Cînd întrerupătorul k este închis, condensatorul C_1 se descarcă prin R (C_2 fiind scurtcircuitat) după legea:

$q_{(t)} = Q_0e^{-t/RC_1}$, unde am notat prin Q_0 sarcina inițială a lui C_1. Intensitatea curentului la momentul t este.

$i_{(t)} = -Q_0e^{-t/RC_1}/RC_1$. În momentul ($\tau$) deschiderii întrerupătorului curentul este:

$$i(\tau) = I_0 = -Q_0e^{-\tau/RC_1}/RC_1$$

de unde $e^{-\tau/RC_1} = -RC_1I_0/Q_0$, iar sarcina pe C_1 va fi:

$$q(\tau) = -I_0RC_1.$$

După deschidere, descărcarea va fi descrisă, la momentul t, de ecuația diferențială:

$$q/Ce_S + Ri = 0$$

unde $Ce_S = C_1C_2/(C_1 + C_2)$.

Prin derivarea ecuației în raport cu t:

$i/Ce_s + Rdi/dt = 0$, obținem $di/i = -dt/RCe_S$, de unde prin integrare și punînd condiția $i_{(0)} = I_0$, găsim:

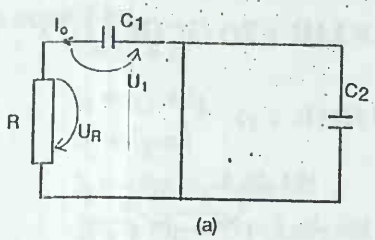
$$i_{(t)} = I_0e^{-t/RCes}$$

Căldura disipată după deschiderea lui k:

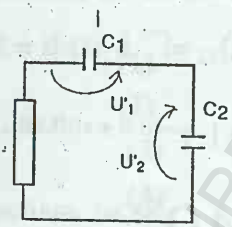
$$Q = \int_0^\infty Ri^2dt = RI_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/RCes}dt = RI_0^2RCes/2 \times$$
$$\times [-e^{-2t/RCes}]_0^\infty = R^2I_0^2C_1C_2/2(C_1 + C_2)$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Altă soluție:



(a)



b)

În momentul deschiderii întrerupătorului tensiunea la bornele condensatorului C_1 este $U_1 = I_0R$.

După deschiderea întrerupătorului (b) C_2 se încarcă, astfel încît, în final $U_1' = U_2' = U$, $i = 0$.

Din conservarea sarcinii electrice:

$q_1 = C_1U_1 = C_1U + C_2U$

rezultă $U = C_1U_1/(C_1 + C_2)$.

Aplicînd legea conservării energiei se va obține căldura disipată în rezistor:

$Q = W_1 - W = C_1U_1^2/2 - (C_1 + C_2)U^2/2.$

După înlocuiri și calcule se găsește

$Q = C_1C_2R^2I_0^2/2(C_1 + C_2)$

51 Un condensator încărcat pînă la tensiunea u este descărcat pe o rezistență $R = 1M\Omega$. Știind că după 218 ms condensatorul pierde o treime din sarcina inițială să se calculeze capacitatea sa.

REZOLVARE

Legea descărcării aperiodice a condensatorului prin R este:

$Ri + q/C = 0$ **și de aici** $dq/q = -dt/RC$, **care prin integrare ne conduce la** $q_{(t)} = Q_0e^{-t/RC}$

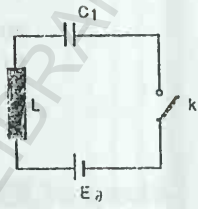
Cum $q = 2Q_0/3$, **înlocuind și logaritmînd, vom avea:**

BIBLIOTECA / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\ln 3/2 = t/RC$ și de aici

$C = t/(R\ln 3/2) = [218.10^{-9}/\ln 3/2]\ F = 537{,}6nF$

52 În circuitul din figură se cunosc C, L, E_0. În momentul inițial, întrerupătorul k este deschis, iar condensatorul C este neîncărcat. Aflați valoarea maximă a intensității curentului și a tensiunii la bornele condensatorului după închiderea întrerupătorului k.



REZOLVARE

Soluția (a)

La momentul t, legea lui Ohm pentru circuit:

$-Ldi/dt + E_0 = q/C$

unde $i = dq/dt$, devine:

$Ld^2q/dt^2 + q/C = E_0$, sau împărțind prin L:

$d^2q/dt^2 + q/LC = E_0/L$

Soluția acestei ecuații diferențiale neomogene se compune din suprapunerea soluției generale a ecuației omogene și una particulară a celei omogene:

$q_{(t)} = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) + E_0C$ cu $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Punînd condițiile inițiale: la $t_0 = 0$, $q_{(0)} = 0$, $i_{(0)} = 0$

$0 = Q_m \sin\varphi + E_0C$

$0 = Q_m\ \omega_0 \cos\varphi$

găsim $\varphi = \pi/2$ și $Q_m = -E_0C$, așa încît sarcina de pe C devine $q_{(t)} = E_0C(1 - \cos\ \omega_0 t)$, iar intensitatea curentului:

$i_{(t)} = (E_0C \sin\ \omega_0 t\ )/\sqrt{LC}$.

Valoarea maximă a intensității curentului va fi $E_0\sqrt{C/L}$, iar a tensiunii la bornele condensatorului $U_{C_{max}} = q_{max}/C = 2E_0$.

BCU IASI CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

Soluție (b)

Dacă intensitatea este maximă ($i = I_{max}$) atunci $di/dt = 0$, $u_L = 0$, deci $q/C = E_0$.

Din legea conservării energiei:

$qE_0 = q^2/2C + LI_m^2/2$, înlocuind $q = CE_0$ se obține

$CE_0^2 = CE_0^2/2 + LI_m^2/2$, de unde

$I_m = E_0\sqrt{C/L}$.

Tensiunea la bornele condensatorului $u_C = q/C$ este maximă atunci cînd sarcina este maximă, deci

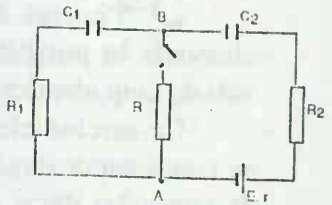
$i = dq/dt = 0$.

Din conservarea energiei găsim:

$q_{max}E_0 = q^2_{max}/2C$,

prin urmare $q_{max} = 2CE_0$, iar $U_{C_{max}} = 2E_0$.

53 În montajul din figură, t.e.m. a sursei E = 10V. Închizînd întrerupătorul, prin baterie trece o sarcină q = 16 μC. Aflați căldura totală degajată în sistem după închiderea întrerupătorului.



REZOLVARE

Înainte de închiderea întrerupătorului, gruparea serie a celor doi condensatori este încărcată cu:

$q_1 = C_S E = C_1C_2E/(C_1 + C_2)$,

energia sistemului fiind:

$W_i = C_S E^2/2 = C_1C_2E^2/2(C_1 + C_2)$.

După închiderea întrerupătorului, primul condensator se descarcă, iar al doilea se încarcă cu:

$q_2 = C_2E$,

astfel încît, în final, energia sistemului va fi

$W_f = C_2E^2/2$.

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În cursul procesului, generatorul deplasează o sarcină $q = q_2 - q_1$, efectuînd un lucru:

$$L = (q_2 - q_1)E = C_2^2E^2/(C_1 + C_2)$$

Făcînd bilanțul energetic:

$$W_f - W_i = L - Q,$$

Se obține energia disipată sub formă de căldură:

$$Q = W_i - W_f + L.$$

Rezultă în urma unor calcule simple:

$$Q = C_2^2E^2/2(C_1 + C_2).$$

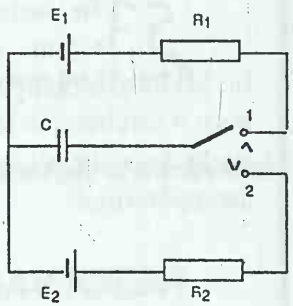
Cum sarcina transportată este

$$q = C_2E - C_1C_2E/(C_1 + C_2) = C_2^2E/(C_1 + C_2),$$

putem scrie, în final:

$$Q = qE/2 = 8x10^{-5}\ J$$

54 Întrerupătorul din circuitul din figură trece alternativ în pozițiile 1 și 2 la intervale de timp identice, foarte mici.



Ce sarcină electrică va apărea pe condensator după un număr mare de comutări dacă variația sarcinii condensatorului în decursul unei singure comutări este neînsemnată?

Se cunosc R_1, R_2, E_1, E_2 și C.

REZOLVARE

După un număr foarte mare de comutări, tensiunea la bornele condensatorului tinde spre o valoare constantă, U.

Aceasta înseamnă că sarcina pe care o preia la o comutare de la generatorul 1 este egală cu sarcina cedată generatorului 2.

$$I_1\Delta t = I_2\Delta t.$$

Aplicînd a doua teoremă a lui Kirchhoff, intensitățile pot fi

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

scrise:

$I_1 = (E_1 - U)/R_1, \quad I_2 = (U - E_2)/R_2.$

Rezolvînd ecuația:

$(E_1 - U)/R_1 = (U - E_2)/R_2$

se obține:

$U = (E_1R_1 + E_2R_2)/(R_1 + R_2),$

$q = CU = C\,(E_1R_1 + E_2R_2)/(R_1 + R_2).$

Oscilațiile libere ale sistemelor cu mai multe grade de libertate

Oscilațiile unui sistem cu mai multe grade de libertate pot fi reprezentate ca o suprapunere de oscilații armonice simple numite moduri normale sau moduri.

Proprietățile unui mod:

- în cazul în care este excitat un singur mod, toate componentele oscilează în fază, cu aceeași frecvență;
- raportul amplitudinilor de oscilație ale părților este caracteristic modului și determină configurația acestuia;
- numărul modurilor unui sistem este egal cu numărul gradelor sale de libertate. Mai multe moduri care au frecvențe egale se numesc degenerate.

Determinarea sistematică a modurilor

Presupunem că am găsit un sistem de ecuații diferențiale, liniare, omogene, de gradul doi:

$$\ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}x_j), \quad i = \overline{1, n}$$

Vom căuta soluții de forma $x_i = A_i \sin(\omega t + \varphi_i)$. Prin derivare se găsește $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$. După înlocuiri, simplificarea părții armonice și rearanjarea termenilor se obține sistemul:

$$(a_{ii} - \omega^2)A_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}A_j = 0, \quad i = \overline{1,n}$$

BCU MIRCEA CEL BĂTRÂN UNIVERSITY LIBRARY

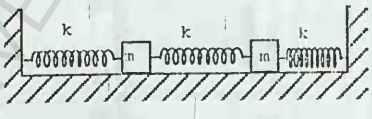
Condiția de compatibilitate a sistemului ($\Delta = 0$) conduce la o ecuație de gradul n în ω^2, ale cărei soluții sînt frecvențele modurilor normale. Revenind cu acestea în sistemul precedent se determină rapoartele amplitudinilor A_j/A_i .

Soluția generală este de forma:

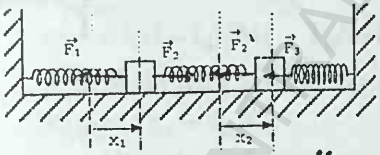
$$x_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \sin(\omega_j t + \varphi_j),$$

unde $\{\omega_j\}$ sînt pulsațiile modurilor normale, iar $\{A_{ij}\}$ respectiv $\{\varphi_j\}$ sînt amplitudinile, respectiv fazele care se vor determina folosind condițiile inițiale.

55 Să se determine pulsațiile modurilor normale ale sistemului din figură. Se cunosc m și k.



REZOLARE



Se scrie ecuația ecuația fundamentală pentru fiecare dintre cele două corpuri:

$$m\ddot{x}_1 = F_2 - F_1 \; ; \; m\ddot{x}_2 = -(F_2' + F_3),$$

unde forțele elastice au expresiile $F_1 = kx_1$, $F_2 = F_2' = k(x_2 - x_1)$, $F_3 = kx_2$

Prin prelucrarea acestor ecuații se obține sistemul:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -2kx_1/m + kx_2/m \\ \ddot{x}_2 = -2kx_2/m + kx_1/m \end{cases}$$

Căutăm soluții de forma $x_{1,2} = A_{1,2} \sin(\omega t + \varphi)$. După înlocuire și simplificare se obține:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 = -2kA_1/m + kA_2/m \\ -\omega^2 A_2 = -2kA_2/m + kA_1/m \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} (2k/m - \omega^2)A_1 - kA_2/m = 0 \\ -kA_1/m + (2k/m - \omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

Din cele două ecuații se scoate raportul amplitudinilor:

$$A_1/A_2 = k/m/(2k/m - \omega^2) = (2k/m - \omega^2)/k/m$$

astfel încît rezultă ecuația

$(2k/m - \omega^2)^2 = k^2/m^2$ cu soluțiile $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$

$A_{11}/A_{21} = 1$, $A_{12}/A_{22} = -1$

56 Să se scrie ecuațiile de mișcare ale corpurilor din problema precedentă dacă inițial ele se află în repaus, avînd elongațiile:

a) $x_{10} = x_{20} = A$

b) $x_{10} = -x_{20} = -A$

c) $x_{10} = 2A$; $x_{20} = 0$

REZOLARE

Notînd

$A_{11} = A_{12} = A_1$, $A_{12} = A_{22} = A_2$, soluția generală se scrie:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Derivînd, obținem vitezele:

$$\begin{cases} v_1 = \omega_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \omega_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ v_2 = \omega_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \omega_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

a) Condițiile inițiale $t = 0$, $x_1 = x_2 = A$, $v_1 = v_2 = 0$ conduc la sistemul:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} A = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 \\ A = A_1 \sin\varphi_1 - A_2 \sin\varphi_2 \\ 0 = \omega_1 A_1 \cos\varphi_1 + \omega_2 A_2 \cos\varphi_2 \\ 0 = \omega_1 A_1 \cos\varphi_1 - \omega_2 A_2 \cos\varphi_2 \end{cases}$$

Din primele două ecuații se găsește $A_1 \sin\varphi_1 = A$, $A_2 \sin\varphi_2 = 0$ iar din ultimele două sistemul: $A_1 \cos\varphi_1 = 0$, $A_2 \cos\varphi_2 = 0$

Prin urmare : $A_2 = 0$, $A_1 = A$, $\varphi_1 = \pi/2$. Ecuațiile de mișcare vor fi deci:

$$x_1 = x_2 = A \cos t \sqrt{k/m}$$

b) Utilizarea condițiilor inițiale conduce la sistemul:

$$\begin{cases} A = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 \\ -A = A_1 \sin\varphi_1 - A_2 \sin\varphi_2 \\ 0 = \omega_1 A_1 \cos\varphi_1 + \omega_2 A_2 \cos\varphi_2 \\ 0 = \omega_1 A_1 \cos\varphi_1 - \omega_2 A_2 \cos\varphi_2 \end{cases}$$

de unde:

$$\begin{cases} A_1 \sin\varphi_1 = 0 \\ A_2 \sin\varphi_2 = A \\ A_1 \cos\varphi_1 = 0 \\ A_2 \cos\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Se obține: $A_1 = 0$, $A_2 = A$, $\varphi_2 = \pi/2$.

$$x_1 = -x_2 = A \cos t \sqrt{3k/m}$$

c) Rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} 2A = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 \\ 0 = A_1 \sin\varphi_1 - A_2 \sin\varphi_2 \\ 0 = \omega_1 A_1 \cos\varphi_1 + \omega_2 A_2 \cos\varphi_2 \\ 0 = \omega_1 A_1 \cos\varphi_1 - \omega_2 A_2 \cos\varphi_2 \end{cases}$$

obținem: $A_1 = A_2 = A$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$. astfel încît ecuațiile de mișcare vor fi:

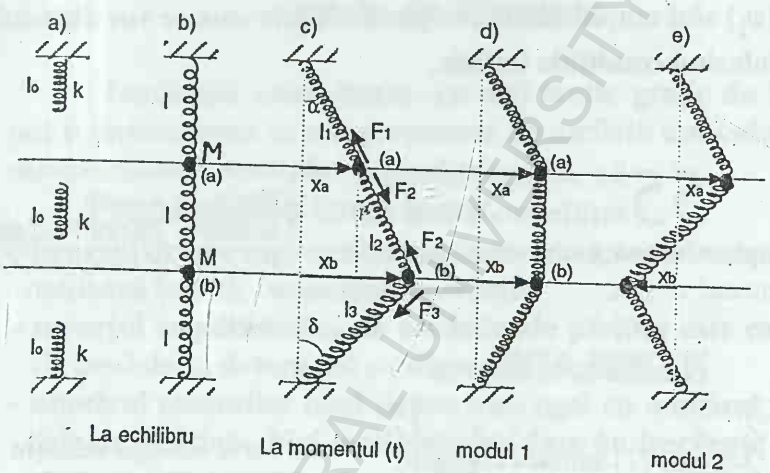
$$x_1 = A(\cos \sqrt{k/m} \times t + \cos \sqrt{3k/m} \times t)$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$x_2 = A(\cos\sqrt{k/m}\times t - \cos\sqrt{3k/m}\times t)$$

Observație: În situațiile (a), respectiv (b) sînt excitate numai primul, respectiv al doilea mod. Al treilea caz (c) este o suprapunere a primelor două.

57 Studiați modurile posibile de oscilație ale sistemului din figură pe direcția transversală în ipoteza alunecării bilelo fără frecare de-a lungul celor două șine orizontale.



REZOLVARE

Fie $T_0 = k(l - l_0)$ tensiunea în resorturile identice la echilibru.

Ecuațiile de mișcare ale corpurilor (a) și (b) se deduc aplicînd principiul fundamental al dinamicii, după cum urmează:

pentru corpul (a) antrenat de resorturile 1 și 2:

$$Md^2x_a/dt^2 = -F_1\sin\alpha + F_2\sin\beta =$$

$$= -k(l_1 - l_0)\sin\alpha + k(l_2 - l_0)\sin\beta$$

$$Md^2x_a/dt^2 = -k(1 - l_0/l_1)x_a + k(1 - l_0/l_2)(x_b - x_a)$$

unde $l_1 = (l^2 + x_a^2)^{1/2} = l(1 + x_a^2/l^2)^{1/2}$,

iar $l_2 = l\{1 + [(x_b - x_a)/l]^2\}^{1/2}$

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În ipoteza micilor oscilații $x_{a,b} << l$, l_1, l_2 rezultă

$1/l_1 = (l + x_a^2/l^2)^{-1/2}/l \cong (1/l)\times(1 - x_a^2/2l^2)$ și analog

$1/l_2 = (1/l)\{1 + [(x_b - x_a)/l]^2\}^{-1/2} \cong (1/l)[1 - (x_b - x_a)^2/2l^2]$

Astfel că:

$Md^2x_a/dt^2 \cong -k[1 - (l_0/l)\times(1 - x_a^2/2l^2)]x_a +$

$+ k\{1 - l_0/l\times[1 - (x_b - -x_a)^2/2l^2)]\}(x_b - x_a)$

În baza aceleiași ipoteze vom neglija termenii în x_a^3 sau $(x_b - x_a)^3$, deci obținem pentru corpul (a):

$$Md^2x_a/dt^2 \cong -k(1 - l_0/l)x_a + k(1 - l_0/l)(x_b - x_a) \quad (1)$$

În mod analog, pentru corpul (b):

$$Md^2x_b/dt^2 = -k(1 - l_0/l)(x_b - x_a) - k(1 - l_0/l)x_b \quad (2)$$

Adunînd, apoi scăzînd între ele ecuațiile sistemului, obținem ecuațiile omogene:

$$Md^2(x_a + x_b)/dt^2 = -k(1 - l_0/l)(x_a + x_b) \quad (3)$$

și

$$Md^2(x_b - x_a)/dt^2 = -3k(1 - l_0/l)(x_b - x_a) \quad (4)$$

Ecuația (3) corespunde modului inferior de oscilație de pulsație

$\omega_1^2 = k(l - l_0)/Ml = T_0/Ml$

și descrie mișcarea centrului de masă al sistemului

$x_{CM} = (x_a + x_b)/2$,

$x_{CM}(t) = A_{CM}\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

În figură acest mod e reprezentat la poziția d) și corespunde mișcării în care resortul central rămîne paralel cu el însuși, de lungime constantă l, iar cele două mase au în orice moment elongații egale și în fază.

Ecuația (4) descrie al doilea mod de oscilație, reprezentat la poziția e) pe fig. și avînd pulsația:

$\omega_2^2 = 3k(l - l_0)/Ml = 3T_0/Ml$

El descrie mișcarea relativă a celor două corpuri

$(x_b - x_a)(t) = A_{rel}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

BCU ALEXANDRU IOAN CUZA UNIVERSITY LIBRARY

Evoluția sistemului corespunzătoare celui de-al doilea mod ne arată că elongațiile celor două mobile sînt de sensuri opuse, iar lungimile instantaneale resorturilor egale între ele la orice moment de timp.

Observație Rezolvarea se simplifică considerînd forța elastică constantă $Fe = k(l - l_0)$ căci în ipoteza micilor oscilații, deformările suplimentare ale resorturilor pot fi neglijate în raport cu $l - l_0$. Așadar, ecuațiile de mișcare vor fi direct:

$$Md^2(x_a + x_b)dt^2 = -k(l - l_0)(x_a + x_b)/l$$

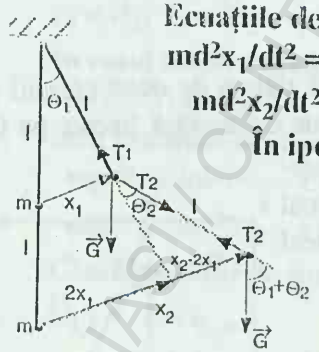
și

$$Md^2(x_b - x_a)dt^2 = -3k(l - l_0)(x_b - x_a)/l ,$$

din care deducem cele două moduri de oscilație.

58 Studiați modurile de oscilație ale unui pendul dublu ale cărui fire au aceeași lungime și susțin mase egale.

REZOLVARE



Ecuațiile de mișcare individuale:

$$md^2x_1/dt^2 = -G_1x + T_2x \ , \text{ unde } T_2 = G_2y \ ,$$

$$md^2x_2/dt^2 = -G_2x \ , \text{ iar } T_1 = G_1y + T_2y \ .$$

În ipoteza micilor oscilații

$$\sin\Theta_1 \cong \Theta_1 = x_1/l \ ,$$

$$\sin\Theta_2 \cong \Theta_2 = (x_2 - 2x_1)/l \ .$$

În consecință, ecuațiile devin, pentru primul corp:

$$md^2x_1/dt^2 = -mgx_1/l + mg\cos(\Theta_1 + \Theta_2) \times \sin\Theta_2 \cong -mgx_1/l + mg(x_2 - 2x_1)/l$$

și respectiv pentru al doilea:

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$md^2x_2/dt^2 = -mg\sin(\Theta_1 + \Theta_2) = -mg[(x_1/l) + (x_2 - 2x_1)/l]$.

Simplificînd ecuațiile, obținem:

$$\begin{cases} d^2x_1/dt^2 = -g(3x_1 - x_2)/l \\ d^2x_2/dt^2 = -g(-x_1 + x_2)/l \end{cases}$$.

Pentru a găsi pulsațiile proprii modurilor de oscilație alcătuim sistemul asociat*

$\omega^2x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$,unde a_{ij} sînt coeficienții variabilelor x_1, x_2 din membrul drept al ecuației diferențiale .

$\omega^2x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2$

Valorile lui ω se obțin rezolvînd

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$, ceea ce la noi devine

$$\begin{vmatrix} (3g/l) - \omega^2 & -g/l \\ -g/l & (g/l) - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$,

de unde $\omega^4 - 4g^2\omega^2/l^2 + 2g^2/l^2 = 0$,

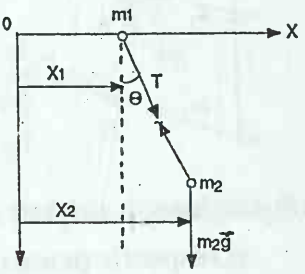
cu soluțiile $\omega^2_{1,2} = (2 \pm \sqrt{2})g/l$.

Primul mod are pulsația:

$\omega_1 = \sqrt{g(2 - \sqrt{2})/l}$,

iar al doilea $\sqrt{g(2, + \sqrt{2})/l}$.

59 Să se studieze mișcarea unui sistem de două corpuri cu masele m_1 și m_2. Primul poate culisa fără frecare pe tija orizontală 0x, iar al doilea oscilează cu amplitudine unghiulară mică în planul vertical x0y, fiind legat de primul printr-un fir ideal de lungime l.



REZOLVARE:

În ipoteza micilor oscilații, mișcarea celui de-al doilea corp poate fi

aproximată cu o mișcare orizontală. Ecuațiile de mișcare vor fi:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = T\sin\Theta \\ m_2\ddot{x}_2 = -T\sin\Theta, \end{cases}$$

unde $T \cong m_2g$, $\sin\Theta = (x_2 - x_1)/l$.

Cu acestea, ecuațiile de mișcare devin:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_2g(x_2 - x_1)/l \\ m_2\ddot{x}_2 = -m_2g(x_2 - x_1)/l \end{cases}$$

Căutăm soluții de forma $x_{1,2} = A_{1,2}\sin\omega t$, astfel încît înlocuind $\ddot{x}_{1,2} = -\omega^2 x_{1,2}$ în sistem găsim:

$$\begin{cases} (m_1\omega^2/m_2 - g/l)x_1 + gx_2/l = 0 \\ gx_1/l + (\omega^2 - g/l)x_2 = 0 \end{cases}$$

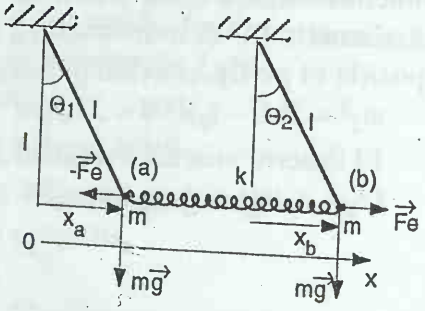
Condiția de compatibilitate

$$\begin{vmatrix} m_1\omega^2/m_2 - g/l & g/l \\ g/l & \omega^2 - g/l \end{vmatrix} = 0$$

Conduce la ecuația: $m_1\omega^4/m_2 - \omega^2 g(m_1/m_2 + 1)/l = 0$, cu soluțiile $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{g(1 + m_2/m_1)/l}$.

Soluția nulă indică faptul că unuia dintre gradele de libertate ale sistemului nu-i corespunde o mișcare oscilatorie. Într-adevăr, mișcarea curentului de masă al sistemului pe direcția 0x este uniformă (forțele externe nu au componente pe această direcție), astfel încît numai mișcarea relativă este oscilatorie.

60 Să se studieze modurile posibile de oscilație ale sistemului format din două pendule de masă și lungimi identice legate printr-un resort de constantă k, nedeformat în poziția de echilibru.



REZOLVARE:

Ecuațiile de mișcare ale celor două corpuri (a) și (b) se obțin aplicînd fiecăruia

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI
FIZICĂ

principiul fundamental al dinamicii, proiectat pe direcția lor de oscilație:

$$\begin{cases} md^2x_a/dt^2 = -mg\sin\Theta_1 - k(x_a - x_b) \\ md^2x_b/dt^2 = -mg\sin\Theta_2 + k(x_a - x_b) \end{cases}.$$

În cazul micilor oscilații:

$\sin\Theta_1 \cong \Theta_1 = x_a/l$, iar $\sin\Theta_2 \cong \Theta_2 = x_b/l$,

așa încît sistemul de ecuații devine:

$$\begin{cases} d^2x_a/dt^2 = -gx_a/l - k(x_a - x_b)/m \\ d^2x_b/dt^2 = -gx_b/l + k(x_a - x_b)/m \end{cases}.$$

Prin adunarea și respectiv scăderea ecuațiilor obținem cele două moduri de oscilație:

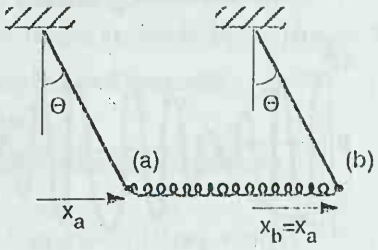
(1) $d^2(x_a + x_b)/dt^2 = -g(x_a + x_b)/l$, cu pulsația $\omega_1 = \sqrt{g/l}$ a modului fundamental

și respectiv:

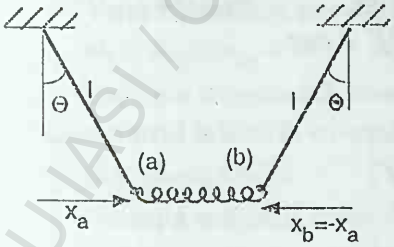
(2) $d^2(x_a - x_b)/dt^2 = -(g/l + 2k/m)(x_a - x_b)$, cu pulsația $\omega_2 = \sqrt{g/l + 2k/m}$.

Primul mod corespunde ecuației mișcării centrului de mase al sistemului și are soluția

$x_{CM}(t) = [(x_a + x_b)/2](t) = A_{CM}\sin(\omega_1 + \varphi_1)$.



Cele două pendule identice oscilează în fază ($x_a = x_b$).

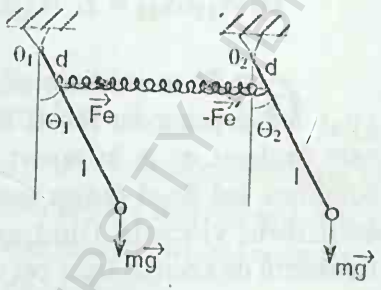


Cel de-al doilea mod descrie oscilația mișcării relative a celor două mobile și corespunde la oscilații individuale în opoziție de fază (v. fig. b).

$x_{rel}(t) = (x_a - x_b)(t) = A_{rel}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$.

BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

6. Să se determine pulsațiile proprii ale micilor oscilații ale sistemului din figură. Corpurile au masa m fiecare, tijele de aceeași lungime l și mase neglijabile, resortul cu constanta de elasticitate k, nedeformat în poziția de echilibru, este prins pe fiecare tijă la distanța d față de punctul de articulare.



REZOLVARE:

Ecuația fundamentală pentru cele două corpuri, considerînd rotații în jurul articulațiilor, se scrie:

$$\vec{M}_{G_0} + \vec{M}_{Fe_0} = I_0\vec{\varepsilon}_1,$$

$$\vec{M}_{G'_0} + \vec{M}_{Fe'_0} = I_0\vec{\varepsilon}_2,$$

unde momentele greutăților în raport cu articulațiile vor fi $M_{G_0} = -mgl\sin\Theta_1$,

$M_{G'_0} = -mgl\sin\Theta_2$,

momentele forței elastice ($Fe = kd\,|\sin\Theta_2 - \sin\Theta_1|$)

$M_{Fe_0} = kd^2(\sin\Theta_2 - \sin\Theta_1)\cos\Theta_1$, $M_{Fe'_0} = kd^2(\sin\Theta_1 - \sin\Theta_2)\cos\Theta_2$

momentele de inerție $I_0 = ml^2$, **accelerațiile unghiulare** $\varepsilon_1 = \ddot{\Theta}_1$, $\varepsilon_2 = \ddot{\Theta}_2$.

În cazul micilor oscilații se pot admite aproximațiile $\sin\Theta \cong \Theta$, $\cos\Theta \cong 1$,

încît ecuațiile iau forma:

$$\begin{cases} -mgl\Theta_1 + kd^2(\Theta_2 - \Theta_1) = ml^2\ddot{\Theta}_1 \\ -mgl\Theta_2 + kd^2(\Theta_1 - \Theta_2) = ml^2\ddot{\Theta}_2 \end{cases}$$

Căutăm soluții de forma $\Theta_{1,2} = A_{1,2}\sin\omega t$, **cu** $\ddot{\Theta}_{1,2} = -\omega^2\Theta_{1,2}$,

care prin înlocuire dau:

$$(*)\begin{cases} (\omega^2 - g/l - kd^2/ml^2)A_1 + kd^2A_2/ml^2 = 0 \\ kd^2A_1/ml^2 + (\omega^2 - g/l - kd^2/ml^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Scriind raportul amplitudinilor unghiulare

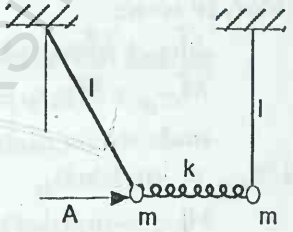
$A_1/A_2 = (kd^2/ml^2)/(kd^2/ml^2 + g/l - \omega^2) = (kd^2/ml^2 + g/l - \omega^2)/(kd^2/ml^2)$

și rezolvînd ecuația în ω^2 găsim în final:

$\omega_1 = \sqrt{g/l}$, $\omega_2 = \sqrt{g/l + 2kd^2/ml^2}$,

cu $A_{11}/A_{21} = 1$, $A_{12}/A_{22} = -1$.

62 Să se studieze mișcările a două pendule identice, cuplate printr-un resort slab. În momentul inițial primul pendul este deplasat cu A în raport cu poziția de echilibru, cel de-al doilea ocupă poziția de echilibru, vitezele fiind nule. Studiați transferul de energie între cei doi oscilatori.



REZOLVARE:

Cele două moduri ale sistemului sînt caracterizate de pulsațiile $\omega_1 = \sqrt{g/l}$, respectiv $\omega_2 = \sqrt{g/l + 2k/m}$, relațiile între amplitudini fiind $A_{11} = A_{21} = A_1$, respectiv $A_{12} = -A_{22} = A_2$ (vezi problema 60).

Legile de mișcare se vor scrie

$x_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

$x_2 = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

$v_1 = \omega_1 A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \omega_2 A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

$v_2 = \omega_1 A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \omega_2 A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

Utilizînd condițiile inițiale ($x_{10} = A$, $x_{20} = 0$, $v_{10} = 0$, $v_{20} = 0$), se obțin (vezi problema 56 c) ecuațiile:

$x_1 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)/2$

$x_2 = A(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)/2$,

sau, utilizînd relații trigonometrice simple:

$x_1 = A\cos[(\omega_1 - \omega_2)/2]t\ \cos[(\omega_1 + \omega_2)/2]t$

$x_2 = A\sin[(\omega_1 - \omega_2)/2]t \sin[(\omega_1 + \omega_2)/2]t$

În cazul cuplajului slab ($k/m << g/l$) se poate scrie $\omega_2 \cong \sqrt{g/l} \times (1 + kl/mg)$.

Cum $\omega_1 \cong \omega_2 = \sqrt{g/l}$, suprapunerea celor două moduri va conduce la fenomenul de bătăi.

Pulsația de modulație va fi

$\omega_{mod} = (\omega_2 - \omega_1)/2 \cong k/2m \times \sqrt{l/g}$, iar pulsația medie

$\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2 \cong \sqrt{g/l}$, legile de mișcare putînd fi scrise:

$x_1 = A\cos(k/2m)\sqrt{l/g}\, t)\cos(\sqrt{g/l}\, t)$

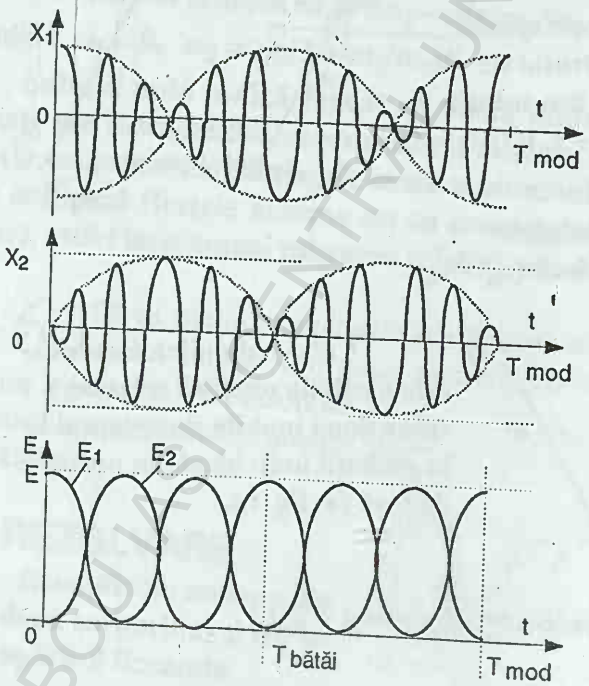
$x_2 = A\sin(k/2m)\sqrt{l/g}\, t)\sin(\sqrt{g/l}\, t)$

Energiile oscilatorilor vor fi

$E_{1,2} = \frac{m\omega^2_m A^2_{mod_{1,2}}}{2}$, unde $A_{mod_1} = A\cos\omega_{mod}t$,

$A_{mod_2} = A\sin\omega_{mod}t$.

Reprezentări grafice:



Energia totală este transmisă de la un oscilator la altul cu pulsația bătăilor $\omega_{bătăi} = \omega_2 - \omega_1 = \omega_{mod}/2$.

BCU IASI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

63. Să se rezolve problema precedentă considerînd masele pendulelor diferite. Are loc în acest caz transferul complet al energiei de la primul corp la al doilea în timpul unei bătăi? (Discuție în funcție de raportul maselor.) Să se reprezinte grafic dependența energiilor de timp pentru următoarele rapoarte ale maselor: 1, 2, 9.

REZOLVARE:

În cazul maselor diferite $m_{1,2}$ sistemul (*) din problema 61 devine, pentru d = l:

$$\begin{cases}(\omega^2 - g/l - k/m_1)A_1 + kA_2/m_1 = 0\\ kA_1/m_2 + (\omega^2 - g/l - k/m_2)A_2 = 0\end{cases}$$

de unde se poate scrie

$$A_1/A_2 = k/m_1/(k/m_1 + g/l - \omega^2) = (k/m_2 + g/l - \omega^2)/k/m_2$$

Rezolvînd, se obțin pulsațiile modurilor:

$\omega_1 = \sqrt{g/l}$, $\omega_2 = \sqrt{g/l + k/\mu}$ (μ = masa redusă: $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$),

cărora le corespund următoarele configurații:

$A_{11}/A_{21} = 1$, $A_{12}/A_{22} = -m_2/m_1$.

Acestea, împreună cu condițiile inițiale, conduc la următoarele legi de mișcare:

$$\begin{cases}x_1 = A[m_2 \cos \omega_1 t/(m_1 + m_2) + m_1 \cos\omega_2 t/(m_1 + m_2)]\\ x_2 = Am_1 (\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)/(m_1 + m_2)\end{cases}$$

Calculul energiilor:

Vom considera pendulele slab cuplate, astfel încît

$\omega_1 \cong \omega_2 \cong \omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $\omega_{mod} = (\omega_2 - \omega_1)/2 << \omega_m$

Energia sistemului, constantă în timp, este localizată la momentul inițial la primul oscilator:

$E = m_1\omega_m^2 A^2/2$

Ecuația mișcării celui de-al doilea poate fi scrisă:

$x_2 = 2Am_1 \sin\omega_{mod} t \sin\omega_m t/(m_1 + m_2) = A_{mod}\sin\omega_m t$,

iar energia acestuia:

$E_2 = m_2 v_{2max}^2/2 = m_2 \omega_{mod}^2 A^2 \sin^2 \omega_{mod} t/2 = 4\mu^2 m_2 \omega_{mod}^2 A^2 \sin^2 \omega_{mod} t/2(m_1 + m_2)^2 =$

$= E \cdot 4\mu^2 \sin^2 \omega_{mod} t/m_1 m_2$.

Din conservarea energiei ($E = E_1 + E_2$) obținem acum E_1:

$E_1 = E\,(1 - 4\mu^2 \sin^2 \omega_{mod} t/m_1 m_2)$.

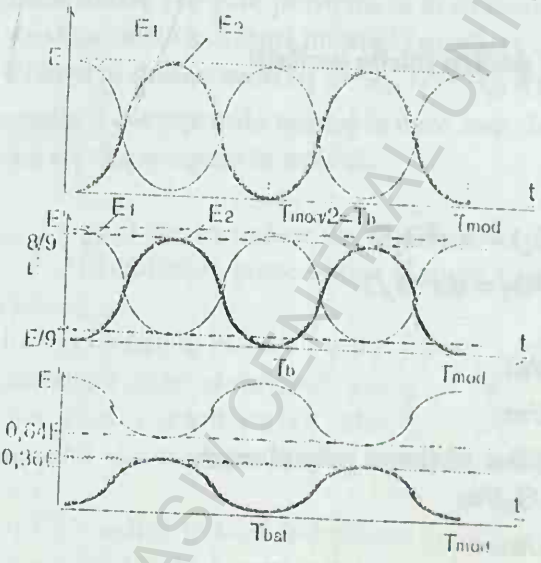
Notînd $m_1/m_2 = r$, expresiile energiilor pot fi scrise:

$E_1 = E\,[1 - 4r \sin^2 \omega_{mod} t/(1 + r)^2]$

$E_2 = E \cdot 4r \sin^2 \omega_{mod} t/(1 + r)^2$

Energia primului oscilator variază între $E_{1min} = E\,[1 - 4r/(1 + r)^2] = E\,[(1 - r)/(1 + r)]^2$ și $E_{1max} = E$. Transferul integral al energiei de la primul corp la al doilea are loc doar pentru $r = 1$, adică $m_1 = m_2$. Cu cît sînt mai diferite masele primul corp va transfera mai puțină energie celui de-al doilea.

Reprezentări grafice



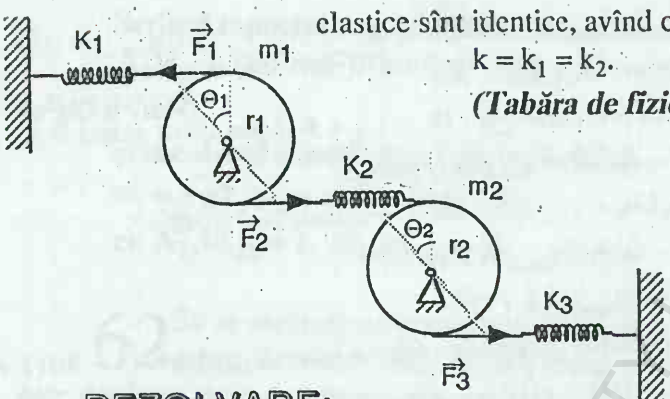
$m_1/m_2=1$

$m_1/m_2=2$
$(m_1/m_2=1/2)$

$m_1/m_2=0$
$(m_1/m_2=1/0)$

64. Să se determine frecvențele naturale ale oscilațiilor sistemului din figură, cunoscînd că masele tamburilor cilindrici sînt $m_1 = m_2 = m$, razele lor $r_1 = r_2 = r$, iar cele trei resorturi

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



elastice sînt identice, avînd constanta elastică $k = k_1 = k_2$.

(Tabără de fizică Braşov 1993)

REZOLVARE:

Fiecare tambur este supus la cîte două forţe elastice din partea resorturilor tangente. Astfel, legile de mişcare vor fi:

$$-F_{e1}r - F_{e2}r = I\ddot{\Theta}_1$$

$$F_{e2}r - F_{e3}r = I\ddot{\Theta}_2 \qquad (1)$$

unde $I = mr^2/2$

iar $F_{e1} = kx_1 \equiv kr\Theta_1$ **pentru micile oscilaţii**

$$F_{e2} = kr(\Theta_2 + \Theta_1)$$

$$F_{e3} = kr\Theta_2$$

Ecuaţiile (1) devin:

$$-kr^2\Theta_1 - kr^2(\Theta_2 + \Theta_1) = mr^2\ddot{\Theta}_1/2$$

$$-kr^2(\Theta_2 + \Theta_1) - kr^2\Theta_2 = mr^2\ddot{\Theta}_2/2$$

sau

$$\ddot{\Theta}_1 = -2k(\Theta_2 + 2\Theta_1)/m$$

$$\ddot{\Theta}_2 = -2k(2\Theta_2 + \Theta_1)/m$$

Prin scăderea ecuaţiilor obţinem primul mod:

$$\ddot{\Theta}_1 - \ddot{\Theta}_2 = -2k(\Theta_1 - \Theta_2)/m$$

cu pulsaţia $\omega_1^2 = 2k/m$.

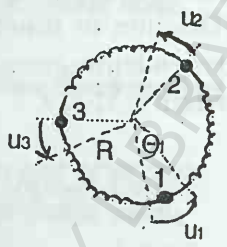
Prin adunarea lor, găsim al doilea mod de oscilaţie:

$$\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2 = -6k(\Theta_1 + \Theta_2)/m$$

cu pulsaţia $\omega_2^2 = 6k/m$

BCU MS CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

65 Trei particule de mase m, unite prin resorturi identice netensionate de constantă k, sînt obligate să se deplaseze pe o traiectorie circulară. Să se scrie ecuația de mișcare a fiecărei particule și să se găsească pulsațiile modurilor lor de oscilație.



REZOLVARE:

Pentru (1):

$$I\ddot{\Theta}_1 = M^{tot}_{Fe/0} = [k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_1)]R$$

cum $\ddot{\Theta}_1 = \ddot{u}_1/R$ **iar** $I/_0$ **momentul de inerție al particulei(1)** $= mR^2$ **rezultă** $\ddot{u}_1 = -2ku_1/m + ku_2/m + ku_3/m$

analog $\ddot{u}_2 = ku_1/m - 2ku_2/m + ku_3/m$

și $\ddot{u}_3 = ku_1/m + ku_2/m - 2ku_3/m$

Pentru aflarea pulsației modurilor proprii alcătuim determinantul sistemului și îl anulăm:

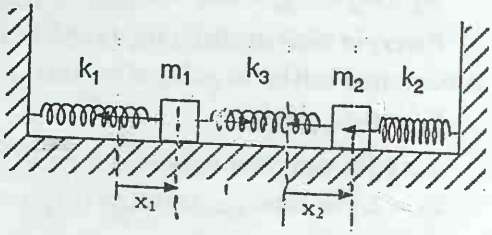
$$\begin{vmatrix} -2k/m + \omega^2 & k/m & k/m \\ k/m & -2k/m + \omega^2 & k/m \\ k/m & k/m & -2k/m + \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

de unde rezultă ecuația $\omega^6 - 6k\omega^4/m + 9k^2\omega^2/m^2 = 0$ **cu soluțiile**

$\omega_1^2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0$ **un mod nul**

$\omega_2 = \sqrt{3k/m} = \omega_3$ **și unul nenul** $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$

66 Găsiți un circuit electric analog sistemului mecanic din figura alăturată.



REZOLVARE:

Notînd cu x_1, **respectiv** x_2, **deplasările celor două corpuri în**

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

raport cu poziția de echilibru, ecuația fundamentală se va scrie:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_3x_1 + k_3x_2$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k_3x_2 + k_3x_1$$

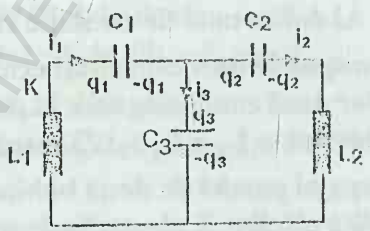
Utilizînd corespondența între mărimile mecanice și electrice (propusă la începutul volumului), ecuațiile pot fi scrise:

$$(*)\quad \begin{cases} -L_1\ddot{q}_1 = q_1/C_1 + (q_1 - q_2)/C_3 \\ -L_2\ddot{q}_2 = q_2/C_2 + (q_2 - q_1)/C_3 \end{cases}$$

Cele două ecuații corespund celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff scrisă pentru două ochiuri care conțin bobinele ideale cu inductanțele L_1, respectiv L_2, condensatorii cu capacitățile C_1, respectiv C_2, având o latură comună, condensatorul de capacitate C_3.

$i_1 = \dot{q}_1$; $i_2 = \dot{q}_2$

$q_3 = q_1 - q_2$ **(conservarea sarcinii electrice)**



67 Deduceți expresiile frecvențelor proprii ale circuitului din problema precedentă, precum și configurațiile modurilor în cazul în care $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C_3 = C$. Comparați cu modurile sistemului mecanic echivalent.

REZOLVARE

Sistemul de ecuații (*) din problema precedentă devine:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = (-2q_1 + q_2)/LC \\ \ddot{q}_2 = (-2q_2 + q_1)/LC \end{cases}$$

Căutăm soluții de forma $q_{1,2} = q_{m1,2}\sin(\omega t + \varphi_0)$, pentru care $\ddot{q}_{1,2} = -\omega^2 q_{1,2}$. Înlocuind în sistem, se obține în urma unor calcule simple:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases}(\omega^2LC-2)q_{m1}+q_{m2}=0\\ q_{m1}+(\omega^2LC-2)q_{m2}=0\end{cases}$$

De aici raportul amplitudinilor poate fi scris

$q_{m1}/q_{m2} = 1/(2-\omega^2LC) = 2-\omega^2LC,$

ceea ce dă, în final:

$\omega_1 = 1/\sqrt{LC}, \qquad q_{m1}/q_{m2} = 1$

$\omega_2 = \sqrt{3/LC}, \qquad q_{m1}/q_{m2} = -1$

Primul mod este caracterizat de $q_1 = q_2$, $i_1 = i_2$, $q_3 = 0$, $i_3 = 0$. Condensatorul din mijloc (C_3) poate fi înlăturat, astfel încît circuitul echivalent va fi format din două bobine în serie, cu inductanța echivalentă 2L și doi condensatori înseriați, cu capacitatea echivalentă C/2.

Acest mod corespunde, în cazul sistemului mecanic, mișcării celor două corpuri cu viteze egale, în același sens, astfel încît resortul dintre ele este permanent nedeformat. Se pot considera în acest caz doi oscilatori identici (masă, resort) decuplați.

Pentru al doilea mod $q_1 = -q_2$, $i_1 = -i_2$, $q_3 = 2q_1$, $i_3 = 2i_1$. Acestuia îi corespunde modul în care masele se mișcă în sensuri opuse cu viteze egale în modul.

68 a) Să se indice un montaj electromagnetic cu ajutorul căruia se poate obține o curbă închisă continuă de forma din figură;

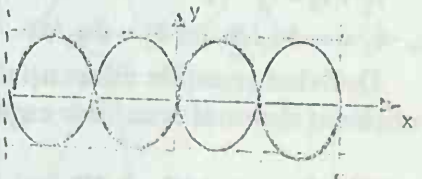


fig.a

b) în condițiile în care curba considerată este simetrică, ce caracteristici cantitative ale montajului electromagnetic pot fi deduse;

c) Ce condiții trebuie îndeplinite pentru a obține o curbă de forma celei considerate anterior cu ajutorul a două circuite identice de tipul indicat în figura *b*.

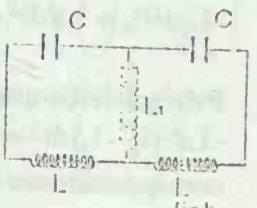


fig.b

(Selecția LO. 1989)

BCU CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

REZOLVARE:

a), b) Pentru a obține curba închisă continuă trebuie suprapuse două oscilații perpendiculare ale căror frecvențe să stea în raportul 1/4 (de ex. pe osciloscop două tensiuni, una pe plăcile X, alta pe Y).

Ecuațiile parametrice ale mișcării spotului de pe ecranul osciloscopului sînt:

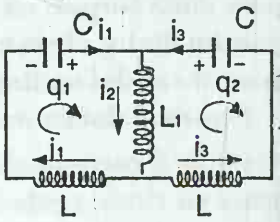
$x = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

$y = A_2\sin(4\omega_1 t + \varphi 2)$

Momentul realizării primului maxim al lui x, $x_{max} = A_1$ trebuie să coincidă cu valoarea 0 pentru y, deci $\omega_1 t + \varphi_1 = (2k + 1)\pi/2$ concomitent cu $4\omega_1 t + \varphi_2 = 0$, de unde $4\varphi_1 - \varphi_2 = (2k + 1)\pi/2$

$k = 0, 1, 2...$

c) să studiem oscilațiile electromagnetice produse în circuitul oscilant. Legile lui Kirchhoff ne conduc la ecuațiile:



$$\begin{cases} -Ldi_1/dt - L_1di_2/dt = q_1/C \\ Ldi_3/dt + L_1di_2/dt = -q_2/C \end{cases}$$

$i_1 + i_3 = i_2$,

$i_1 = = dq_1/dt$, iar $i_3 = dq_2/dt$.

Derivînd ecuațiile diferențiale încă o dată în raport cu t obținem sistemul ecuațiilor cuplate:

$$\begin{cases} -L_1d^2(i_1 + i_3)/dt^2 - Ld^2i_1/dt^2 = i_1/C \\ -L_1d^2(i_1 + i_3)/dt^2 - Ld^2i_3/dt^2 = i_3/C \end{cases}$$

Prin scăderea ecuațiilor sistemului găsim ecuația:

$-Ld^2(i_1 - i_3)dt^2 = (i_1 - i_3)/C$,

corespunzătoare modului de oscilație cu $\omega_1 = 1/\sqrt{LC}$ (primul

mod de oscilație).

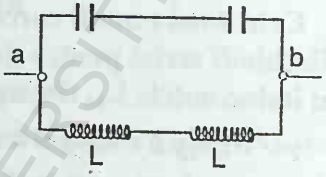
Prin adunare, obținem ecuația decuplată:

$-2L_1d^2(i_1 + i_3)/dt^2 - Ld^2(i_1 + i_3)/dt^2 = (i_1 + i_3)/C$ sau

$d^2(i_1 + i_3)/dt^2 = (i_1 + i_3)/(2L_1 + L)C$

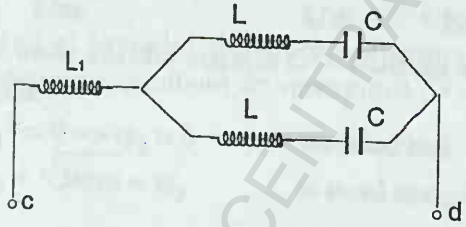
a cărei pulsație este $\omega_2 = 1/\sqrt{(2L_1 + L)C}$ (al doilea mod de oscilație).

Primul mod de oscilație corespunde montajului echivalent cu $L_e = 2L$ două bobine L în serie, și $C_e = C/2$ condensatoare în serie, așa încît L_1 rămîne inactivă.

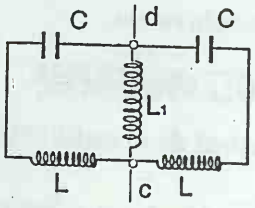


Putem aplica tensiunea u_{ab} pe plăcile Y ale osciloscopului, întrucît $\omega_1 > \omega_2$

Al doilea mod de oscilație cu ω_2 corespunde unei capacități echivalente egale cu 2C prin legarea celor două condensatoare în paralel și unei inductanțe echivalente $L_e = L_1 + L/2$ rezultată prin înserierea lui L_1 cu grupajul paralel de două bobine L. Tensiunea între c și d se aplică plăcilor X ale osciloscopului.



Echivalent cu

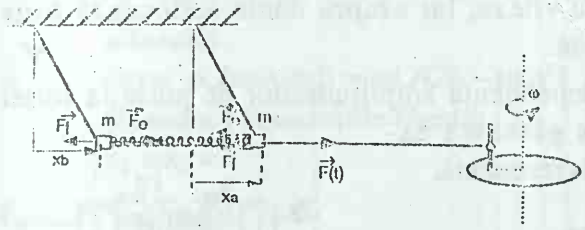


Condiția de a obține figura Lissajous din fig a) este ca $\omega_2/\omega_1 = 1/4$, adică $L_1 = 7{,}5L$.

69 Fie sistemul de două pendule identice (lungime l și masă m) cuplate prin resortul slab (constanta k), supuse unei forțe de frecare fluide proporționale cu viteza instantanee (coeficient de frecare C) a fiecărui mobil; unul dintre corpurile m este

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

...trenat de forța externă $F(t) = F_0\cos\omega t$, produsă de discul unui piku cuplat cu sistemul printr-un fir elastic.



Considerînd pulsația ω variabilă, să se studieze grafic dependența amplitudinilor A_{ab} și A_{el} ale fiecărui pendul de această pulsație, în cazul micilor oscilații.

REZOLVARE:

Ecuațiile de mișcare ale pendulelor cuplate devin:

$$(1)\begin{cases} md^2x_a/dt^2 = -mgx_a/l - k(x_a - x_b) - Cdx_a/dt + F_0\cos\omega t \\ md^2x_b/dt^2 = -mgx_b/l + k(x_a - x_b) - Cdx_b/dt \end{cases}.$$

Prin adunarea lor obținem ecuația decuplată a mișcării centrului de masă

$$(2)\quad md^2(x_a + x_b)/dt^2 = -mg(x_a + x_b)/l - Cd(x_a + x_b)/dt + F_0\cos\omega t\ .$$

Notăm cu $\omega^2_{10} = g/l$ pulsația proprie a modului fundamental (fără frecare)

și cu coordonata $x_1 = x_a + x_b$.

Ecuația (2) devine: $md^2x_1/dt^2 + m\omega_{10}^2x_1 + Cdx_1/dt = F_0\cos\omega t$ (3) și descrie mișcarea centrului de masă.

Prin scăderea ecuațiilor sistemului (1) obținem ecuația mișcării corespunzătoare celui de-al doilea mod:

$$md^2(x_a - x_b)/dt^2 = -mg(x_a - x_b)/l - 2k(x_a - x_b) - Cd(x_a - x_b)/dt + F_0\cos\omega t \quad (4)$$

și descrie mișcarea relativă a corpurilor sistemului.

Cu notațiile $\omega_{20}^2 = g/l + 2k/m$ pentru pulsația proprie celui de-al doilea mod și $x_2 = x_a - x_b$ coordonata sa, ecuația (4) devine:

$md^2x_2/dt^2 + m\omega_{20}^2x_2 + Cdx_2/dt = F_0\cos\omega t$. (5)

Ecuațiile (3) și (5) sînt decuplate, independente. Fiecare mod se comportă ca un oscilator unidimensional amortizat întreținut de aceeași forță externă.

Propunem pentru $x_1(t)$ soluția în regim permanent:

$x_1(t) = A_{1ab}\sin\omega t + A_{1el}\cos\omega t$

și înlocuind în (3) găsim dependența amplitudinilor de ω:

$A_{1ab}(\omega) = C\omega F_0/m^2/[(\omega^2 - \omega_{10}^2)^2 + C^2\omega^2/m^2]$,

iar

$A_{1el}(\omega) = F_0(\omega_{10}^2 - \omega^2)/[(\omega^2 - \omega_{10}^2)^2 + C^2\omega^2/m^2]/m$

(vezi reprezentarea grafică în problema 80 din vol I) .

În mod analog pentru al doilea mod:

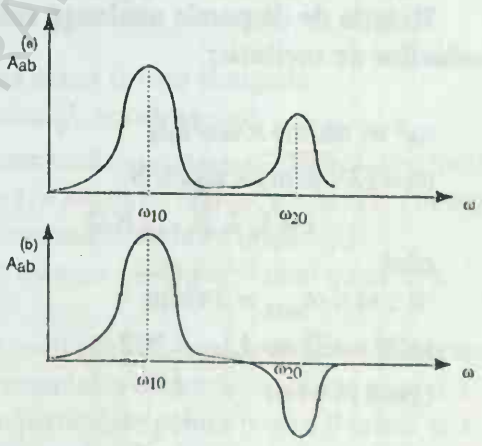
$x_2(t) = A_{2ab}\sin\omega t + A_{2el}\cos\omega t$,

unde

$A_{2ab} = C\omega F_0/m^2/[(\omega^2 - \omega_{20}^2)^2 + C^2\omega^2/m^2]$, iar

$A_{2el} = F_0(\omega_{20}^2 - \omega^2)/m/[(\omega^2 - \omega_{20}^2)^2 + C^2\omega^2/m^2]$.

Cum $x_a = x_1 + x_2$ rezultă $A_{ab}^{(a)}(\omega) = A_{1ab}(\omega) + A_{2ab}(\omega)$ pentru amplitudinea absorbitivă a primului corp (a), a cărei reprezentare grafică prezintă două rezonanțe, cîte una pentru fiecare frecvență proprie, ambele în sens pozitiv.



Pentru corpul (b) rezultă amplitudinea absorbitivă

$A_{ab}^{(b)}(\omega) = A_{1ab}(\omega) - A_{2ab}(\omega)$.

tot cu două rezonanțe, dar una pozitivă și cealaltă negativă în dreptul pulsațiilor proprii celor două moduri ω_{10}, respectiv ω_{20} (cea negativă).

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

70 Generalizați problema 65 pentru sistemul format din N particule identice. Căutați ecuațiile de mișcare pentru fiecare și pulsațiile proprii ale modurilor lor de oscilație. Stabiliți domeniul frecvențelor posibile pentru un lanț ce conține un număr infinit de particule.

REZOLVARE:

Ecuațiile sistemului de N bile:
pentru a n-a bilă din lanț:

$$\ddot{u}_n = k(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n).$$

Prin analogie cu lanțul liniar soluția ecuației de mișcare a bilei (n) va fi:

$$u_n(t) = A\sin nk_i l_0 \cos(\omega_i t)$$

$$i = 1, 2, \ldots . N$$

$$n = 1, 2, \ldots . N$$

unde

$$k_i = i\pi/L = i\pi/Nl_0$$

$$u_n(t) = (A\sin ni\pi/N) \times \cos\omega_i t$$

Relația de dispersie analoagă celei a lanțului ne dă pulsația modurilor de oscilație:

$$\omega_i^2 = (4k/m) \times \sin^2 k_i l_0$$

$$\omega_i = (2\sqrt{k/m}) \times \sin i\pi/N$$

$$i = 1, 2, , \ldots . N/2$$

căci

$$0 \le \omega \le \omega_{max} = 2\sqrt{k/m}$$

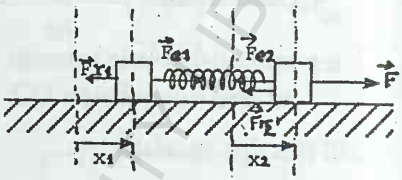
$$i\pi/N = \pi/2 \Rightarrow i_{max} = N/2$$

$$(\text{cînd } N \to \infty)$$

BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITAR

71 Două corpuri de masă m sînt legate printr-un resort cu constanta de elasticitate k. Ele întîmpină forțe de rezistență proporționale cu viteza, iar asupra unuia acționează forța perturbatoare $F = F_0 \sin\omega t$.

Să se studieze dependența amplitudinilor de pulsația forței perturbatoare și să se găsească expresiile amplitudinilor la rezonanță.



REZOLVARE:

Ecuațiile de mișcare ale celor două corpuri sînt:

$$m\ddot{x}_1 = -C\dot{x}_1 + k(x_2 - x_1) \quad ,$$

$$m\ddot{x}_2 = -C\dot{x}_2 - k(x_2 - x_1) + F \quad .$$

Prin adunarea, respectiv scăderea ecuațiilor se va obține:

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -C(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + F \quad ,$$

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -C(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - 2k(x_2 - x_1) + F \quad .$$

Notînd $x_1 + x_2 = x$, $x_2 - x_1 = y$, ecuațiile decuplate se pot scrie:

$$F - C\dot{x} - m\ddot{x} = 0 \quad ,$$

$$F - C\dot{y} - 2ky - m\ddot{y} = 0 \quad .$$

Căutăm soluții de forma $x = A\sin(\omega t + \alpha)$, $y = B\sin(\omega t + \beta)$.

Se calculează:

$$\dot{x} = \omega A\sin(\omega t + \alpha + \pi/2), \ \ddot{x} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \alpha),$$

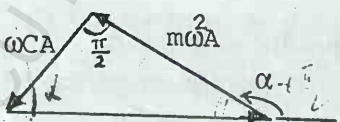
$$\dot{y} = \omega B\sin(\omega t + \beta + \pi/2), \ \ddot{y} = -\omega^2 B\sin(\omega t + \beta),$$

iar apoi, prin înlocuire, se găsește:

$$F_0\sin\omega t + m\omega^2 A\sin(\omega t + \alpha) - \omega CA\sin(\omega t + \alpha + \pi/2) = 0 \quad ,$$

$$F_0\sin\omega t + (m\omega^2 - 2k)B\sin(\omega t + \beta) - \omega CB\sin(\omega t + \beta + \pi/2) = 0 \quad .$$

Din reprezentările fazoriale:



se obțin , aplicînd teorema lui Pitagora, amplitudinile:

$$A = F_0/\omega\sqrt{m^2\omega^2 + C^2}, \qquad B = F_0/\sqrt{(m\omega^2 - 2k)^2 + \omega^2C^2}$$

și fazele:

$$tg\alpha = -C/m\omega,\ tg\beta = \omega C/(2k - m\omega^2) .$$

Revenind la notațiile făcute:

$$x_1 + x_2 = x ,$$

$$x_2 - x_1 = y ,$$

se obține:

$$x_1 = (x - y)/2, \qquad x_2 = (x + y)/2.$$

Amplitudinile oscilațiilor celor două corpuri vor fi date de:

$$4A_1^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(\alpha - \beta),$$

$$4A_2^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha - \beta),$$

unde $\cos(\alpha - \beta) = (1 + tg\alpha tg\beta)/\sqrt{(1 + tg^2\alpha)(1 + tg^2\beta)}$.

După înlocuiri și calcule se obține:

$$A_1 = F_0k/\omega\sqrt{(m^2\omega^2 + C^2)[(m\omega^2 - 2k)^2 + \omega^2C^2]} ,$$

$$A_2 = F_0\sqrt{[(m\omega^2 - k)^2 + \omega^2C^2]} \,/\, \omega\sqrt{(m^2\omega^2 + C^2)}\times$$

$$\times\sqrt{[(m\omega^2 - 2k)^2 + \omega^2C^2]}.$$

În absența amortizării ($C = 0$) expresiile amplitudinilor sînt:

$$A_1 = F_0k/m\omega^2\,|\,m\omega^2 - 2k\,| \quad ,$$

$$A_2 = F_0\,|(m\omega^2 - k)/(m\omega^2 - 2k)|/m\omega^2 .$$

Pentru $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $A_2 = 0$, $A_1 = F_0/k$. În acest caz, forța excitatoare menține al doilea corp în echilibru, puterea absorbită fiind nulă.

Pentru $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$, $A_1 \to \infty$, $A_2 \to \infty$.

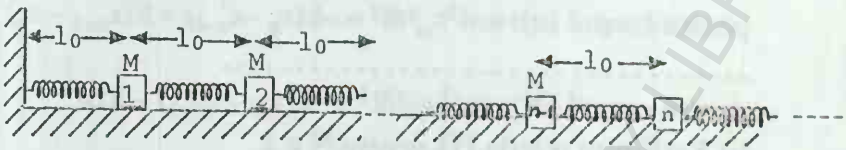
Considerînd mișcarea slab amortizată, frecvențele de rezonanță rămîn practic aceleași ca în cazul absenței amortizării.

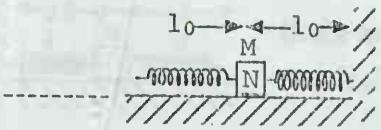
Pentru $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $A_1 \cong F_0/k$, $A_2 \cong F_0C/k\sqrt{km}$,

iar pentru $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$, $A_1 \cong F_0\sqrt{m/k}/C \cong A_2$.

BCU "I. CREANGĂ" UNIVERSITY LIBRARY

72 Fie un şir de resorturi elastice de lungime nedeformată l_0 şi constantă elastică k, între care sînt intercalate N corpuri punctiforme de mase egale m, ce pot aluneca fără frecare pe o suprafaţă orizontală. Fie L lungimea totală a sistemului.





După modelul problemelor cu 1, 2 sau 3 corpuri de mase identice oscilînd longitudinal sub acţiunea resorturilor elastice identice dispuse pe lungimea L, găsiţi:

a) ecuaţiile de mişcare ale maselor sistemului;

b) verificaţi pe cazurile particulare şi apoi generalizaţi faptul că modurile de oscilaţie proprii au pulsaţiile date de relaţia

$$(1)\ \omega^2_i = 4k/m \cdot \sin^2 k_i l_0/2 \qquad i = 1, 2 \ldots . N$$

unde $k_i = i\pi/L$

c) verificaţi că mişcarea masei (n) are elongaţia:

$$(2)\ x_n(t) = A\sin nk_i l_0 \times \cos[\omega_i t + \varphi]$$

d) consideraţi acum masa totală şi constanta elastică distribuite uniform pe întreaga lungime L a mediului elastic, găsiţi echivalentul realţiei (1) trecînd la limita continuă (relaţia de dispersie)

e) ce devine ecuaţia de mişcare (2) în cazul unui asemenea mediu?

f) găsiţi şirul de celule oscilante LC, analog sistemului mecanic prezentat pentru care scrieţi ecuaţia de dispersie şi soluţia generală $I_n(t)$. Verificaţi-le pe cazurile particulare pentru pentru 0 celule şi 2 celule.

Discuţie asupra soluţiei în cazul în care inductanţa şi capacitatea sînt uniform distribuite. Consideraţi l_0 dimensiunea longitudinală a unei celule.

REZOLVARE:

a) pentru corpul (1): $md^2x_1/dt^2 = -kx_1 + K(x_2 - x_1)$

pentru corpul (2): $md^2x_2/dt^2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2)$

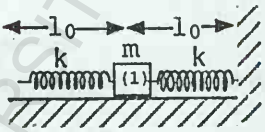
.....

pentru corpul (n): $md^2x_n/dt^2 = -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n)$

.....

pentru corpul (N): $md^2x_N/dt^2 = -k(x_N - x_{N-1}) - kx_N$

b) Verificăm relația (1) pentru N = 1



avem $\omega_1^2 = 2k/m$ (un singur mod)

într-adevăr $k_1 = \pi/L = \pi/2l_0$ și

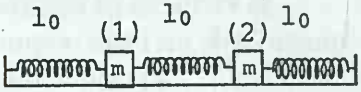
$\sin\pi l_0/4l_0 = \sqrt{2}/2$,

rezultă $\omega_1^2 = 2k/m$

Pentru N = 2 avem două moduri $\omega_1^2 = k/m$ și $\omega_2^2 = 3k/m$

Într-adevăr $k_1 = \pi/L = \pi/3l_0$ și

$\sin \pi l_0/3l_02 = 1/2$



iar $\omega_1^2 = k/m$ și

$k_2 = 2\pi/L$, $\sin 2\pi l_0/3l_02 = \sqrt{3}/2$,

iar $\omega_2^2 = 3k/m$

Pentru N = 3 avem trei moduri $\omega_{1,3}^2 = (2 \pm \sqrt{2})k/m$,

$\omega_2^2 = 2k/m$

le regăsim pentru $k_1 = \pi/L = \pi/4l_0$, $\sin\pi l_0/4l_02 = (\sqrt{2 - \sqrt{2}})/2$,

$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})k/m$

pentru $k_2 = 2\pi/L = \pi/2l_0$, $\sin\pi l_0/2l_02 = \sqrt{2}/2$, $\omega_2^2 = 2k/m$

pentru $k_3 = 3\pi/L = 3\pi/4l_0$, $\sin 3\pi l_0/4l_02 = (\sqrt{2 + \sqrt{2}})/2$,

$\omega_3^2 = (2 + \sqrt{2})k/m$

Putem generaliza: $\omega_i^2 = 4k/m \times \sin^2 k_i l_0/2$ $i = 1, 2, \ldots . N$

există atîtea moduri de oscilație cîte mase are sistemul

$k_i = i\pi/(N + 1)l_0$ luînd N valori

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) $x_n(t) = A\sin[nk_il_0\cos(\omega_i t + \varphi)]$

$x_{n-1}(t) = A\sin(n-1)k_il_0\cos(\omega_i t + \varphi)$

$x_{n+1}(t) = A\sin(n+1)k_il_0\cos(\omega_i t + \varphi)$

se introduc în (2) și rezultă, după simplificare prin $\cos(\omega_i t + \varphi)$, identitatea ușor de verificat:

$\sin^2 k_il_0 \sin nk_il_0 = 2\sin nk_il_0 - \sin(n-1)k_il_0 - \sin(n+1)k_il_0$

$= 2\sin nk_il_0 - 2\sin nk_il_0 \cos k_il_0$

$= \sin nk_il_0 \sin^2 k_il_0$

d) $k_i \to k$

$\omega^2(k) = 4v_f^2 \sin^2 \pi l_0/\lambda$

căci $k/m = (k^{tot}l_0/L)/\rho_0 l_0 = k^{tot}L/\rho_0 = E^{(young)}/\rho_0 = v_f^2$

Semnificația lui $kl_0 = 2\pi l_0/\lambda$:

Atunci cînd avem (m și k) parametrii concentrați mărimea kl_0 care apare în ecuația oscilației $A\sin nkl_0\cos(\omega t + \varphi)$ reprezintă creșterea fazei în radiani de la masa punctiformă (n) la următoarea (n+1). O putem nota cu $\varnothing$. Atunci

$\omega^2(k) = 4v_f^2 \times \sin^2 \varnothing/2$

e) $x_n(t) = (A\sin 2n\pi l_0/\lambda) \times \cos(\omega t + \varphi)$

nl_0 este coordonata spațiala a masei (n) fie ea z (0z axă în lungul lui L)

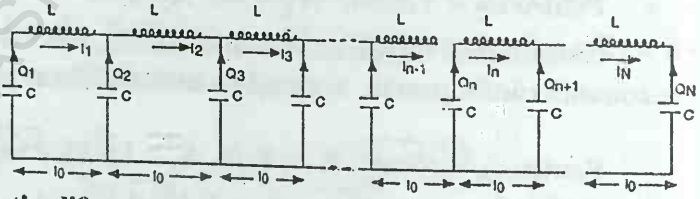
Ecuația (2) devine:

$x(t) = [A\sin 2\pi z/\lambda] \times \cos(\omega t + \varphi)$

$x(t) = A\sin kz.\cos(\omega_{(k)} t + \varphi)$

este ecuația unei unde staționare în mediul elastic omogen.

f)



Ecuația diferențială pentru curentul I_n:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$-LdI_n/dt = Q_n/C - Q_{n+1}/C$

cu $dQ_n/dt = I_{n-1} - I_n$ și

$dQ_{n+1}/dt = I_n - I_{n+1}$

derivînd-o în raport cu t:

(3) $d^2I_n/dt^2 = -(I_n - I_{n-1})/LC + (I_{n+1} - I_n)/LC$

Pentru aflarea ecuației de dispersie $\omega = \omega(k)$ aflăm modurile și intensitățile individuale.

Presupunem, pentru început, că ω ar fi frecvența unui mod pentru care curenții ar avea expresiile

.....

$I_{n-1}(t) = Im_{n-1}\cos\omega t$

$I_n(t) = Im_n\cos(\omega t + \varphi)$

$I_{n+1}(t) = Im_{n+1}\cos(\omega t + \varphi)$

Introducîndu-le în (3), amplitudinea lor trebuie să satisfacă

$-\omega^2 Im_n = (Im_{n+1} - 2Im_n + Im_{n-1})/LC$

adică $Im_{n+1} + Im_{n-1} = Im_n(2 - LC\omega^2)$ (4)

Propunem ca soluție pentru ecuația (4), prin analogie cu cea pentru șirul de oscilatori mecanici:

$Im_{(z)} = A\sin kz + B\cos kz = A\sin knl_0 + B\cos knl_0$,

unde $k = 2\pi/\lambda$, iar $z = nl_0$ coordonata celui în care circulă curentul I_n.

În cazul sistemului de bobine și condensatoare concentrate, mărimea kl_0 este creșterea fazei funcției Im_n cînd se trece de la o inductanță concentrată la alta sau de la o capacitate la alta, pentru sarcini. Nu avem nevoie să precizăm distanța l_0 prin care sînt separate bobinele (comportarea circuitului nedepinzînd de configurația lui spațială). Putem înlocui pe kl_0 prin $\varnothing$ – creșterea fazei cînd n crește cu 1.

Introducînd amplitudinile:

$Im_{n-1} = A\sin(n-1)kl_0 + B\cos(n-1)kl_0$

$Im_n = A\sin nkl_0 + B\cos nkl_0$

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$Im_{n+1} = A \sin(n + 1)kl_0 + B\cos(n + 1)kl_0$

în ecuația (4) sîntem conduși prin identificarea coeficientului funcțiilor independente $\sin nkl_0$ și $\cos nkl_0$, la

$\omega^2 = 2(1 - \cos kl_0)/LC = (4/LC) \times \sin kl_0/2 = (4/LC) \times \sin^2 \varnothing/2$,

(ecuația dispersiei.)

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1

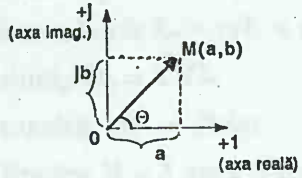
Reprezentarea în complex a mărimilor electrice sinusoidale

După cum se știe, unei mărimi oscilatorii i se poate asocia un vector rotitor, numit fazor, astfel încît mărimea respectivă se regăsește în una din componentele acestuia.

O formă echivalentă de reprezentare a vectorilor în plan sînt numerele complexe.

Fie a și b două numere reale, iar $j^2 = -1$, atunci $\underline{z} = a + jb$ se numește număr complex.

Oricărui număr complex îi corespunde în planul complex un punct M(a,b)



Numărul complex $\underline{Z}$ este reprezentat prin vectorul $\overrightarrow{OM}$

Modulul numărului complex Z este dat de $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = z$

Argumentul numărului complex $\underline{z}$ este $\arg \underline{z} = \Theta$

Sub formă trigonometrică, un număr complex, respectiv conjugatul său, pot fi exprimate astfel:

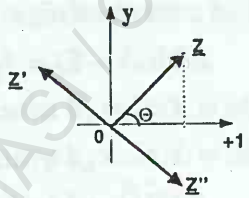
$\underline{z} = z(\cos\Theta + j\sin\Theta)$ și $\overline{z}^* = z(\cos\Theta - j\sin\Theta)$

Derivatele întîi, respectiv a doua, sînt date de:

$\underline{z}' = j\underline{z} = z[\cos(\Theta + \pi/2) + j\sin(\Theta + \pi/2)]$

$\underline{z}'' = -j\underline{z} = z[\cos(\Theta - \pi/2) + j\sin(\Theta - \pi/2)]$

În planul complex s-ar reprezenta astfel:



Sub formă exponențială, un număr complex poate fi scris:

$\underline{z} = ze^{j\Theta}$. Conjugatul său complex este dat de $z^* = ze^{-j\Theta}$.

Din produsul $\underline{z}\underline{z}^* = z^2$ obținem:

$|\underline{z}| = z = \sqrt{\underline{z}\underline{z}^*}$

Obs.: Pentru exprimarea exponențială a unui număr complex am folosit formulele lui Euler:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$e^{j\Theta} = \cos\Theta + j\sin\Theta$

$e^{-j\Theta} = \cos\Theta - j\sin\Theta$

Pentru studiul circuitelor de curent alternativ se pot asocia intensităţilor, tensiunilor, reactanţelor... numere complexe.

Valorile instantanee ale mărimilor alternative sînt date de partea imaginară sau reală a numărului complex asociat.

Exemplu: Fie expresia intensităţii curentului din circuit de forma:

$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

Numărul complex asociat este

$\underline{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$

În acest caz, i = Imag $\underline{I}$ (partea imaginară a numărului complex)

Dacă $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ atunci i = Re$\underline{I}$ (partea reală a numărului complex).

Circuitele de curent alternativ sînt caracterizate, după cum se ştie, de impedanţă, definită ca raport între valorile maxime sau efective ale tensiunii (u) şi intensităţii (i) şi de introducerea unui defazaj între u şi i.

Se defineşte impedanţa complexă a circuitului

$\underline{z} = \underline{U} / \underline{I}$

Modulul şi argumentul impedanţei complexe:

$|\underline{z}| = U_m/I_m = z$, $\arg \underline{z} = \arg \underline{U} - \arg \underline{I} = \varphi$

reprezintă impedanţa circuitului, respectiv defazajul tensiunii la borne faţă de intensitate.

Exemple:

a) rezistor ($R = \underline{U}_R / \underline{I}_R$) pentru care $\underline{z} = R$

b) bobină ideală pentru care $\underline{z} = \underline{x}_L = jx_L$

c) condensator pentru care $\underline{z} = \underline{x}_C = -jx_C$

2

Utilizînd mărimile complexe, legea lui Ohm penru circuitele de curent alternativ se scrie la fel ca în curent continuu:

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\underline{I} = \underline{U}/\underline{z}$

Legile lui Kirchhoff pot fi scrise, de asemenea, sub formă complexă:

a) Pentru nod: $\underline{I} = \sum_K \underline{I}_K$, unde $\underline{I}_K$ sînt intensitățile complexe ale curenților care se întîlnesc într-un nod;

b) Pentru ochi: $\sum_K \underline{E}_K = \sum_K \underline{I}_K \underline{z}_K$, unde $\underline{E}_K$, respectiv $\underline{I}_K \underline{z}_K$ sînt tensiunile electromotoare complexe ale generatoarelor, respectiv căderile de tensiune pe laturile ochiului.

Consecințele legilor lui Kirchhoff, respectiv Ohm, rezultate în curent continuu, se pot transpune în cazul circuitelor de c.a., utilizînd formalismul complex.

Astfel, grupării rezistoarelor îi va corespunde gruparea impedanțelor complexe, astfel încît vom avea în complex aceeași relație ca și în curent continuu, obținute prin înlocuirea rezistențelor electrice cu impedanțele complexe.

a) serie: $\underline{z}_S = \sum_K \underline{z}_K$

b) paralel: $1/\underline{z}_P = \sum_K 1/\underline{z}_K$

În continuare este prezentat modul de rezolvare în complex a circuitelor RLC de curent alternativ, serie și paralel

1. Circuit serie RLC în curent alternativ

Legea lui Kirchhoff scrisă în complex este de forma:

$\underline{U} = L\omega j\underline{I} - j\underline{I}/C\omega + R\underline{I}$, cu $\underline{I} = I_m e^{j\omega t}$

Se obține astfel dependența între intensitate și tensiune (Legea lui Ohm):

$\underline{U} = [R + j(L\omega - 1/C\omega)]\underline{I} = [R + \underline{x}_L + \underline{x}_C]\underline{I} = [R + \underline{x}]\underline{I} = \underline{Z}\,\underline{I}$

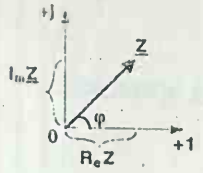
unde $\underline{Z}$ este impedanța complexă a circuitului, cu

$\underline{z} = R + j(x_L - x_C) = Ze^{i\varphi}$

Modulul impedanței: $|\underline{z}| = \sqrt{\underline{z}\underline{z}^*} = \sqrt{R^2 + (x_L - x_L)^2}$

și $\arg\underline{z} = \varphi$ cu $tg\varphi = \text{Imag}\,\underline{z}/\text{Re}\underline{z} = (x_L - x_C)/R$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Din relatia $\underline{U} = Ze^{j\varphi}\underline{I}$ se vede că φ este defazajul între u și i.

Din legea lui Ohm în complex: $\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z}$ se obtine aceeași lege în functie de valorile maxime ale mărimilor alternative (sau efective): $I_m = U_m/Z$

Circuit paralel RLC

Tensiunea la bornele circuitului este de forma $u = U_m \sin\omega t$.

Legea lui Kirchhoff pentru intensități este: $i = i_R + i_C + i_L$.

Introducînd mărimile asociate $\underline{U} = U_m e^{j\omega t}$,

$\underline{I}_L = \underline{U}/\underline{x}_L = U/jx_L = -j\underline{U}/x_L$, $\underline{I}_C = \underline{U}/\underline{x}_C = j\underline{U}/x_C$ și $\underline{I}_R = \underline{U}/R$, legea lui Ohm devine:

$\underline{I} = \underline{U}[1/R + j(1/x_C - 1/x_L)] = \underline{U}/\underline{Z}$, unde

$$\underline{z} = 1/[1/R + j(1/x_C - 1/x_L)] = ze^{j\varphi}$$

Modulul lui $\underline{z}$ este $|\underline{z}| = \sqrt{\underline{z}\underline{z}^*} = 1/[1/R^2 + (1/x_C - 1/x_L)^2]$

și $\arg\underline{z} = \varphi$ cu $tg\varphi = Imag\ \underline{z}/Re\underline{z} = (1/x_L - 1/x_C)/1/R$

În cazul circuitului paralel se poate defini o mărime numită admitanță $Y = 1/Z$ și $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$.

Legea lui Ohm se poate scrie: $\underline{I} = \underline{U}\,\underline{Y}$

cu $\underline{Y} = [1/R + j(1/x_C - 1/x_L)] = \underline{Z}^*/\underline{Z}\underline{Z}^* = \underline{Z}^*/Z^2$

Puterea complexă

Fie $u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi)$ tensiunea la bornele unui circuit și $i = \sqrt{2}I\sin\omega t$ intensitatea curentului absorbit.

Se definește puterea complexă

$$\underline{S} = ui^*/2 = UIe^{j\varphi}$$

Scriind puterea complexă în formă trigonometrică:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\underline{S} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi$

se pot observa următoarele:

– modulul puterii complexe reprezintă puterea aparentă;

– partea reală reprezintă puterea activă;

– partea imaginară este puterea reactivă.

$\underline{S} = P + jPr$

Folosind legea lui Ohm pentru circuitul de curent alternativ $U = IZ$, puterea mai poate fi scrisă:

$\underline{S} = \underline{I}\,\underline{Z}\,\underline{I}^* = I^2\underline{Z}$,

sau

$S = I^2Z$

$P = I^2R$

$Pr = I^2X$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Bibliografie

1) E. Bădărău, M. Grumăzescu: *Bazele acusticii moderne*, Editura Academiei, Bucureşti 1961

2) E. Bădărău, M. Grumăzescu: *Ultraacustica fizică şi tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti 1967

3) A. Hristev: *Mecanica şi acustica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti1982

4) S. Hangan, I. Slătineanu: *Mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1983

5) Fr. Crawford jr.: *Cursul de fizică Berkeley, Unde* volumul III, trad. din engl. Editura Didactică şi Pedagogică,1983

6) Edw. Purcell: *Cursul de fizică Berkeley* volumul II *Electricitate şi magnetism*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982

7) Sears, Zemansky, Young: *Fizică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983

8) R. Ţiţeica, Ioviţiu Popescu: *Fizica generală*, Volumul I, Editura Tehnică, Bucureşti, 1973

9) R. Ţiţeica, Ioviţiu Popescu: *Fizica generală*, volumul II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1973

10) I. M. Popescu, D. Iordache, ş.a.: *Probleme rezolvate de fizică*, volumul I, Editura Tehnică, Bucureşti, 19..

11) O. Gherman, M. Laszlo, ş.a.: *Probleme de fizică pentru liceu*, Editura Scrisul Romanesc, Craiova, 1975

12) R. Sfichi: *Probleme de limită şi extrem în fizică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979

13) M. Sandu: *Probleme de fizică*, Editura Scrisul Romanesc, Craiova, 1987

14) M. Sandu: *500 probleme de fizică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1991

15) M. Sandu: *Probleme de performanţă în fizică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1992

16) G.S. Landsberg: *Optica*, traducere din limba rusă, Editura Tehnică, Bucureşti, 1968

17) *** Colecţia Revistei Fizică şi Chimie 1982-1991

18) *** Revista Evrika - Brăila

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY